Gloutonner

G. Aldon - J. Germoni - J.-M. Mény

mars 2012

Algorithme glouton

Le principe de l'algorithme glouton (greedy algorithm) :
faire toujours un choix localement optimal dans l'espoir que ce choix mènera à une solution globalement optimale.

Coloration des sommets d'un graphe

On cherche à obtenir une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse à la contrainte suivante : deux sommets voisins n'ont jamais la même couleur.

On cherche à optimiser le nombre de couleurs utilisées. Le plus petit nombre de couleurs permettant la coloration est appelé nombre chromatique du graphe.

Algorithme glouton

On considère l'algorithme suivant :

- Input. Un graphe G et des couleurs 1,2,3,4...Les sommets de G sont numérotés de 1 à n (s_1,s_2,...,s_n).

Algorithme glouton

On considère l'algorithme suivant :

- Input. Un graphe G et des couleurs 1,2,3,4...Les sommets de G sont numérotés de 1 à n $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.
- Output. Une coloration valide du graphe G. Mais le nombre de couleurs utilisées est-il minimal ?

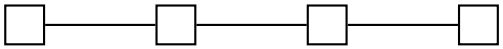
Algorithme glouton

On considère l'algorithme suivant :

- Input. Un graphe G et des couleurs 1,2,3,4...Les sommets de G sont numérotés de 1 à n (s_1,s_2,...,s_n).
- Output. Une coloration valide du graphe G. Mais le nombre de couleurs utilisées est-il minimal ?
- Traitement. Pour i allant de 1 à n, affecter au sommet s_i la plus petite couleur non déjà affectée à ses voisins déjà coloriés (c'est-à-dire la plus petite couleur non déjà affectée à ceux des sommets s_1,s_2,...,s_{i-1} qui lui sont adjacents). En d'autres termes, on gloutonne : on s'attache, localement, à ne pas augmenter le nombre de couleurs lorsque c'est possible.

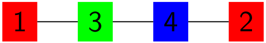
Une coloration non nécessairement optimale

Appliquer l'algorithme au graphe ci-dessous avec plusieurs numérotions des sommets et en déduire que l'algorithme ne donne pas nécessairement le nombre chromatique.

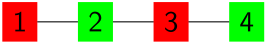


Une coloration non nécessairement optimale

- Première numérotation :



- Seconde numérotation :



La coloration peut être optimale

Exercice. Établir qu'on peut toujours numéroter les sommets de façon à obtenir le nombre chromatique en appliquant l'algorithme.

La coloration peut être optimale

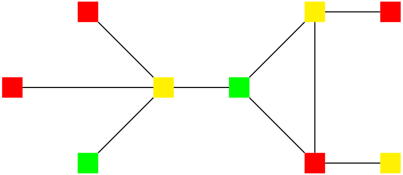
Exercice. Établir qu'on peut toujours numéroter les sommets de façon à obtenir le nombre chromatique en appliquant l'algorithme.

Preuve.

- On suppose disposer d'une coloration optimale par les couleurs c_1, c_2, c_3, ..., c_χ.
- On numérote d'abord les sommets de couleur c_1, puis les sommets de couleur c_2, puis les sommets de couleur c_3 ...
- L'algorithme colorie alors les sommets de couleur c_1 en une couleur c'_1, les sommets de couleurs c_2 en couleur c'_1 ou c'_2, les sommets de couleur c_3 en couleur c'_1 ou c'_2 ou c'_3 ...

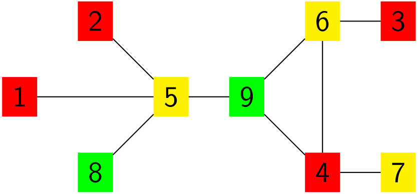
Illustration

Appliquer le principe de la démonstration précédente au graphe ci-dessous pour lequel on a donné une coloration optimale.



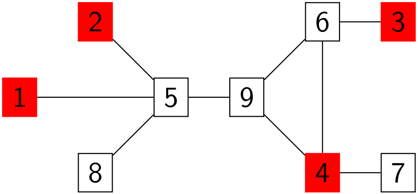
Illustration

On numérote, par exemple, comme suit suivant l'ordre , , des couleurs :



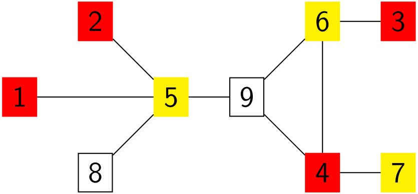
Illustration

Les sommets rouges reprennent la couleur rouge :



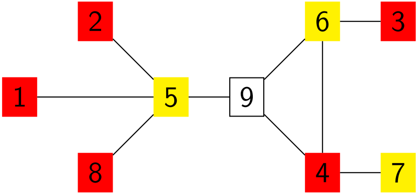
Illustration

Les sommets 5, 6, 7 voisins de sommets rouges prennent la couleur jaune :



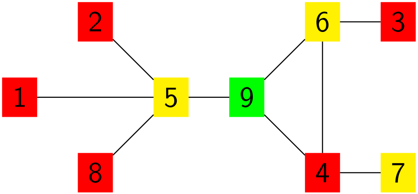
Illustration

Le sommet 8 ne reprend pas sa couleur initiale :



Illustration

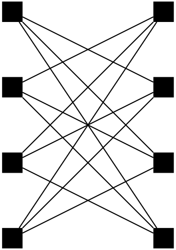
Le sommet 9 doit prendre une troisième couleur :



Un glouton très mauvais ?

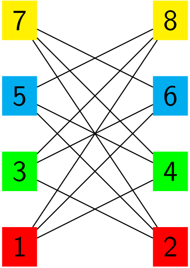
L'algorithme glouton proposé ne donne pas nécessairement le nombre minimum de couleurs. Mais peut-il être très mauvais (du point de vue du nombre de couleurs utilisées) ?

Montrer que oui avec des graphes construits comme le suivant :



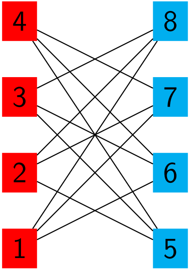
Un glouton très mauvais

On numérote d'abord ligne par ligne de gauche à droite. L'algorithme donne 4 couleurs :



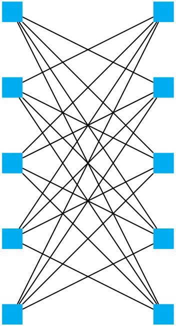
Un glouton très mauvais

On numérote maintenant par colonne, l'algorithme donne 2 couleurs :



Un glouton très mauvais

En généralisant sur ce type de graphe, on obtient des graphes colorés avec l'algorithme, avec k couleurs, k entier fixé à l'avance aussi grand que désiré, alors que le nombre chromatique est 2.



Les épreuves du gymnase

On reprend le problème du gymnase : on veut que se déroule, sur 24 h, le plus grand nombre possible d'épreuves, chaque épreuve étant caractérisée par une heure de début et une heure de fin. On cherche maintenant le nombre minimal de gymnases permettant le déroulement de toutes les épreuves.

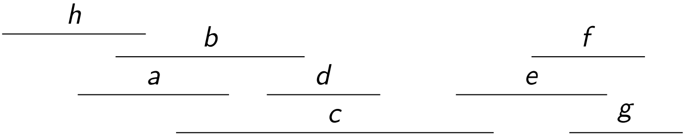
Glouton 1

Les dates de fin au plus tôt ayant permis le déroulement d'un nombre optimal d'épreuves avec un seul gymnase, on essaie de "remplir" le gymnase 1 au maximum avec ce principe, puis on passe à un gymnase 2, puis . . .

Glouton 1

Les dates de fin au plus tôt ayant permis le déroulement d'un nombre optimal d'épreuves avec un seul gymnase, on essaie de "remplir" le gymnase 1 au maximum avec ce principe, puis on passe à un gymnase 2, puis . . .

Vérifier que le résultat n'est pas optimal avec la situation suivante :

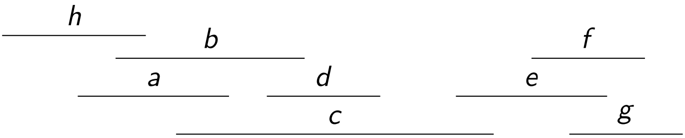


Glouton 1

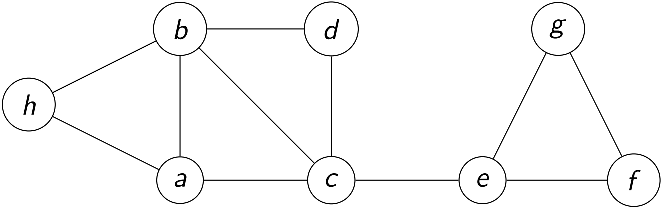
Le gymnase 1 verra se dérouler les épreuves : h, d, e,
le gymnase 2 : a, f
le gymnase 3 : b, g
le gymnase 4 : c.
Alors que 3 gymnases suffisent : $h, c, f - a, d, e - b, g$.

Glouton 2

On représente les intervalles de temps

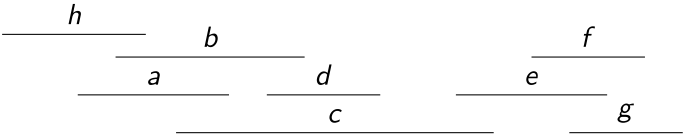


par le graphe des incompatibilités :

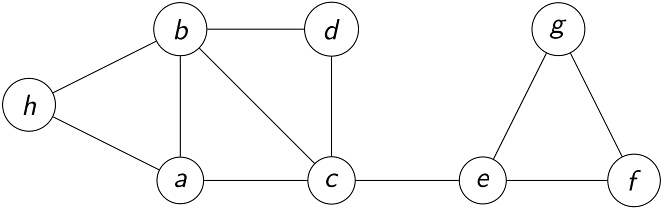


Glouton 2

On représente les intervalles de temps



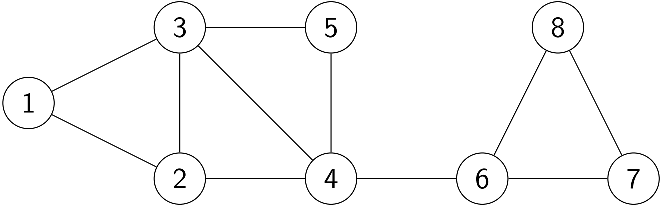
par le graphe des incompatibilités :



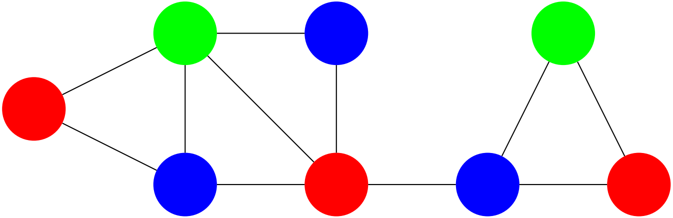
Montrer qu'une coloration du graphe par notre algorithme glouton de coloration utilise un nombre de couleurs égal au nombre chromatique avec une numérotation des sommets correspondant à l'ordre croissant des extrémités gauche des intervalles.

Glouton 2 – Illustration

Numérotation des sommets pour l'application de l'algorithme (ordre croissant des débuts d'épreuves) :



ce qui donne la coloration suivante :



Glouton 2 – Preuve de l'optimalité

Lorsqu'un sommet v reçoit une couleur k, c'est que l'extrémité gauche de l'intervalle v appartient à au moins $k-1$ intervalles (sinon on pourrait choisir une couleur $\leqslant k-1$ pour v).

Glouton 2 – Preuve de l'optimalité

Lorsqu'un sommet v reçoit une couleur k, c'est que l'extrémité gauche de l'intervalle v appartient à au moins $k-1$ intervalles (sinon on pourrait choisir une couleur $\leqslant k-1$ pour v).

Tous ces intervalles se coupent (l'extrémité gauche de v est commun à tous) :
le graphe présente donc une clique d'ordre $\geqslant k$, donc le nombre chromatique est d'au moins k.