Déterminants en géométrie

Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2012–2013

On se place dans un plan affine ou un espace affine de dimension 3, – euclidien lorsqu'il le faut – muni d'un repère – orthonormé lorsqu'il le faut – ou, ce qui revient au même, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ – muni du produit scalaire euclidien si nécessaire.

I Incidence

1° Deux droites dans le plan

Soit deux droites D et D_2 d'équations[1] $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ dans le plan. L'annulation de quel déterminant caractérise-t-il le parallélisme de ces deux droites ?

2° Trois droites dans le plan

Ajoutons une troisième droite D_3 d'équation $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Montrer que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Deux plans dans l'espace

Soit trois plans P_1 et P_2 d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ dans l'espace. Montrer que P_1 et P_2 sont parallèles ou confondus si et seulement si

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{SSI} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & {}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4° Trois plans dans l'espace

Ajoutons un troisième plan P_3 d'équation $a_3x + b_3y + c_3z = 0$. Que traduit l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

5° Quatre plans dans l'espace

Ajoutons un quatrième plan P_4 d'équation $a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$. Que traduit l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

II Équations

1° Équation d'une droite dans le plan

Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

1. On se donne a_1, b_1, c_1 et on suppose que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Idem pour les autres droites et plans.

2° Équation d'un plan dans l'espace

a) En s'inspirant par l'exemple précédent, exprimer une équation du plan (ABC) par l'annulation d'un déterminant 4×4, où $A = (x_A, y_A, z_A)$, etc.

b) Soit $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point, $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par u_1 et u_2 si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Équation d'un cercle du plan

Soit $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ trois points non alignés du plan. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ appartient au cercle circonscrit à (ABC) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x \\ y_A & y_B & y_C & y \\ x_A^2 + y_A^2 & x_B^2 + y_B^2 & x_C^2 + y_C^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

III Longueurs, aires, volumes...

1° Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme

Relier les notions suivantes dans le plan : sinus, aire, déterminant. Passer dans l'espace et ajouter le produit vectoriel à la liste.

2° Volume d'un parallélépipède

Pourquoi et comment le déterminant doit-il être considéré comme une façon de mesurer des volumes ?

IV Distance entre deux sous-espaces

1° Distance d'un point à une droite dans le plan

Montrer d'au moins deux façons différentes que la distance d'un point $M = (x, y)$ à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est :

$$d(M, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2° Distance d'un point à un plan dans l'espace

Montrer que la distance d'un point $M = (x, y, z)$ au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On pourra chercher le projeté orthogonal de M comme un point particulier de la droite contenant M et engendrée par $u = (a, b, c)$.

3° Distance d'un point à une droite dans l'espace

a) Soit, dans l'espace, A un point, v un vecteur non nul et D la droite contenant A et dirigée par v. Montrer que la distance d'un point M à D est :

$$d(M, D) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge v||}{||v||}.$$

On pourra utiliser le sinus de l'angle formé par $\overrightarrow{AM}$ et v.

b) Que donne cette formule lorsque D est présentée par un système d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_1x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$?

4° Distance entre deux droites

Pour $i = 1, 2$, soit D_i une droite de l'espace, A_i un point de D_i et $v_i = (a_i, b_i, c_i)$ un vecteur directeur. On suppose que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires ; en particulier, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

a) Vérifier que $v = v_1 \wedge v_2$ est, à scalaire près, l'unique vecteur orthogonal à v_1 et v_2.

b) Supposons qu'il existe une droite Δ perpendiculaire à D_1 et D_2 (i.e. de direction orthogonale à celles de D_1 et D_2 et qui les coupe toutes deux). Montrer que Δ est contenu dans le plan P_i contenant (un point de) D_i et engendré par v_i et v ($i = 1, 2$).
En déduire l'unicité et l'existence d'une perpendiculaire commune. On note H_i le point d'intersection de D_i et Δ ($i = 1, 2$).
Montrer que la distance de D_1 à D_2 est la distance H_1H_2.

V Matrice de Gram et applications

Soit, dans un espace euclidien E de dimension quelconque dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, une famille de vecteurs $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. On appelle *matrice de Gram* la matrice $G(\mathbf{v}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$G(\mathbf{v}) = \big(\langle v_i, v_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad g(\mathbf{v}) = \det G(\mathbf{v}).$$

1° Premières propriétés

a) Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de E et $A(\mathbf{v}) = A_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$ la matrice $r \times n$ suivante :

$$A(\mathbf{v}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \big(\langle e_i, v_j \rangle\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Montrer la relation :

$$G(\mathbf{v}) = {}^tA(\mathbf{v})A(\mathbf{v}).$$

b) En déduire que la famille $\mathbf{v}$ est libre si et seulement si $g(\mathbf{v}) \neq 0$.
On choisira une base $\mathbf{e}$ *de l'espace engendré par* $\mathbf{v}$ *et on appliquera la question précédente.*

c) Montrer que le rang de $G(\mathbf{v})$ est égal au rang de $\mathbf{v}$.
Soit r le rang de $\mathbf{v}$. *La question précédente permet d'exhiber un mineur $r \times r$ non nul. Inversement, si $(v_1, \ldots, v_r)$ est libre, montrer que les colonnes $r+1$ à n de $G(\mathbf{v})$ sont des combinaisons linéaires des r premières.*

2° Matrice de Gram et volume

a) Vérifier[2] que $g(\mathbf{v})$ est le carré du volume du parallélépipède engendré par $\mathbf{v}$.

b) En particulier, pour $n = 2$ et v_1, v_2 non nuls, on a :

$$\sin^2(\widehat{v_1, v_2}) = \frac{g(v_1, v_2)}{g(v_1)g(v_2)}.$$

3° Matrice de Gram et distance entre sous-espaces

a) Soit w_n le projeté orthogonal de v_n sur l'espace F engendré par $(v_1, \ldots, v_{n-1})$; on pose : $v_n' = v_n - w_n$. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) = ||v_n'||^2 g(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

2. L'intérêt de cette formule, c'est qu'elle ne dépend d'aucune base.

b) En déduire une formule intrinsèque (ne dépendant d'aucune base) pour exprimer la distance d'un point à un sous-espace affine.
c) Comparer cette formule à celles de la partie IV.
Pour une droite dans le plan engendrée par $v = (a, b)$*, on a par exemple :* $a^2 + b^2 = g(v)$*. Que représente le numérateur ? Pour un plan engendré par* v_1 *et* v_2*, quel rapport entre les coefficients* a*,* b*,* c *d'une équation du plan, le produit vectoriel* $v_1 \wedge v_2$ *et le déterminant de Gram* $g(v_1, v_2)$ *? Etc.*
d) Deuxième approche pour la distance entre deux droites. On reprend les notations de IV 4°. Pour $t_i \in \mathbb{R}$, on note $H_i = A_i + t_i v_i$ (i.e. $\overrightarrow{A_i H_i} = t v_i$). Montrer qu'il existe un unique couple (t_1, t_2) tel que la droite $(H_1 H_2)$ soit perpendiculaire à D_1 et D_2.
On écrira un système 2×2 *dont la matrice est une matrice de Gram.*
Montrer que l'on a :

$$d(D_1, D_2)^2 = \frac{g\big(\overrightarrow{A_1 A_2}, v_1, v_2\big)}{g(v_1, v_2)}.$$

On commencera par se convaincre que le numérateur est indépendant de A_1 *et* A_2 *et que le quotient est indépendant de* v_1 *et* v_2*.*

4° Matrice de Gram et angle entre supplémentaires

a) Soit k compris entre 1 et n. Supposons que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour tout $i \leqslant k$ et tout $j \geqslant k+1$. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) = g(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

b) Soit k compris entre 1 et n. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) \leqslant g(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si la condition de la question précédente est remplie.
c) Comment pourrait-on définir l'angle entre deux sous-espaces supplémentaires ?