Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2014-2015
Préparation à l'écrit - Samedi 13 décembre 2014

Durée : 4 à 6 heures - Le sujet comporte 6 pages.

Dans ce problème, on se propose de prouver l'analogue complexe suivant du théorème de Rolle :

Théorème 1. *Soient n un entier avec $n \geqslant 2$, P un polynôme de degré n à coefficients complexes et a et b deux nombres complexes distincts tels que $P(a) = P(b)$. Alors le polynôme dérivé P' de P possède au moins une racine dans le disque*

$$\mathcal{D}_{a,b,n} = \left\{ z \in \mathbf{C} \ : \ \left| z - \frac{a+b}{2} \right| \leqslant R_{a,b,n} \right\}$$

où

$$R_{a,b,n} = \frac{|a-b|}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

- Les parties A, B et C sont indépendantes.
- Certaines questions des parties D et E utilisent un ou plusieurs résultats établis précédemment.
- Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes est assimilé à un plan affine euclidien dont les éléments seront indistinctement dénommés *nombres* ou *points*.
- Pour tout entier naturel n, la notation $\mathbf{C}_n[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients complexes et de degré au plus n.
- La notation $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k vérifiant $m \leqslant k \leqslant n$.

Merci de préciser l'avancement de la copie après 4 heures de composition.

DF

Partie A. Cas particuliers

1. Soit P un polynôme à coefficients réels et a et b deux réels tels que $a < b$ et $P(a) = P(b)$. Démontrer qu'il existe un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$.
2. On suppose ici que P est un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 4$ et que a et b sont deux réels tels que $a < b$ et $P(a) = P(b)$. Vérifier que le théorème 1 est vrai.
3. On fixe ici $P = X^3$ et deux nombres complexes distincts a et b tels que $P(a) = P(b)$. Vérifier que le théorème 1 est vrai.

Partie B. L'opérateur A_z

Si P appartient à $\mathbf{C}_n[X]$ et z appartient à $\mathbf{C}$, on définit le polynôme A_zP par

$$A_zP(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Cette définition dépend donc de l'entier n.

1. Vérifier que A_z définit une application linéaire de $\mathbf{C}_n[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-1}[X]$.
2. Justifier que, pour tous z_1 et z_2 complexes, on a

$$A_{z_1}\left(A_{z_2}P\right)(X) = A_{z_2}\left(A_{z_1}P\right)(X)$$

   où dans la composition $A_{z_1} \circ A_{z_2}$, A_{z_2} est considéré comme application de $\mathbf{C}_n[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_1} est considéré comme application de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-2}[X]$. Pareillement, dans la composition $A_{z_2} \circ A_{z_1}$, A_{z_1} est considéré comme application de $\mathbf{C}_n[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_2} est considéré comme application de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-2}[X]$.
3. Justifier que la famille $(X - z)^k$ où $0 \leqslant k \leqslant n$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_n[X]$.
4. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire A_z de $\mathbf{C}_n[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-1}[X]$.
5. L'application $P \mapsto A_zP$ définit également un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$. On notera $\widehat{A_z}$ cet endomorphisme.
   (a) Montrer que l'endomorphisme $\widehat{A_z}$ est diagonalisable.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes z_1 et z_2 pour que les endomorphismes $\widehat{A_{z_1}}$ et $\widehat{A_{z_2}}$ commutent.
   (c) Soit E un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$. Montrer que E commute avec $\widehat{A_z}$ si et seulement si il existe un polynôme Q appartenant à $\mathbf{C}_n[X]$ tel que $E = Q\left(\widehat{A_z}\right)$.

Partie C. Homographies et cercles du plan

On désigne par ∞ un élément n'appartenant pas au corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.
Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}(2, \mathbf{C})$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on définit l'application

$$f_M \; : \; \mathbf{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\} \; : \; z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec les conventions suivantes :

(i) si $c = 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{si } z \in \mathbf{C} \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

(ii) si $c \neq 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } z \neq \frac{-d}{c} \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Une telle application est appelée *homographie*. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies.

L'application

$$\varphi \; : \; \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{H} \; : \; M \longmapsto f_M$$

est donc une application surjective entre $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ et $\mathcal{H}$.

1. Démontrer qu'une homographie réalise une bijection de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
2. Vérifier que pour toutes matrices M_1, M_2 de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, on a

$$\varphi(M_1 M_2) = \varphi(M_1) \circ \varphi(M_2)$$

où $M_1 M_2$ désigne le produit matriciel et $\varphi(M_1) \circ \varphi(M_2)$ désigne la composition des applications.

3. Justifier que $\mathcal{H}$ est un groupe pour la composition puis que φ est un morphisme surjectif du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ dans $\mathcal{H}$. Préciser le noyau de φ.
4. (a) Justifier que l'unique homographie f vérifiant

$$f(0) = 0, \qquad f(\infty) = \infty, \qquad f(1) = 1$$

est l'identité $id : z \mapsto z$.

(b) Démontrer que si z_1, z_2, z_3 sont trois éléments de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ distincts deux à deux, alors il existe une unique homographie f vérifiant

$$f(z_1) = 0, \qquad f(z_2) = \infty, \qquad f(z_3) = 1.$$

(On pourra utiliser l'expression $\dfrac{z_3 - z_2}{z - z_2} \times \dfrac{z - z_1}{z_3 - z_1}$.)

Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre éléments de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ avec z_1, z_2, z_3 deux à deux distincts, leur *birapport* est

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = f(z_4)$$

où f est l'homographie définie par les égalités $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = \infty$ et $f(z_3) = 1$.
Le birapport est donc un élément de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

5. Démontrer que si g est une homographie, alors, pour tous nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 avec z_1, z_2, z_3 distincts deux à deux, on a

$$[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

6. Démontrer que si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre éléments de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ avec z_1, z_2, z_3 deux à deux distincts et z_1, z_2, z_4 deux à deux distincts, alors

$$[z_1, z_2, z_4, z_3] = \frac{1}{[z_1, z_2, z_3, z_4]}$$

7. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts deux à deux.
   (a) Justifier l'égalité

   $$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

   (b) Montrer que le birapport $[z_1, z_2, z_3, \infty]$ est réel si et seulement si z_1, z_2, z_3 sont alignés et qu'il est réel strictement négatif si et seulement si z_3 appartient au segment $]z_1, z_2[$.
8. On rappelle la caractérisation suivante : quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 distincts deux à deux sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \times \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbf{R}$$

   On considère trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 non alignés. Démontrer qu'un nombre z appartient au cercle passant par z_1, z_2 et z_3 si et seulement si

$$[z_1, z_2, z_3, z] \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

9. Si le cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbf{C}$ est défini par

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - z_0| = r\}$$

   avec z_0 complexe et r réel strictement positif, on définit

$$\mathcal{C}^- = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - z_0| < r\} \text{ et } \mathcal{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - z_0| > r\}.$$

   Justifier que, si $\mathcal{C}$ est un cercle, alors $\mathcal{C}^-$ et $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^-$ sont des sous-ensembles convexes de $\mathbf{C}$.
10. Soient f une homographie et $\mathcal{C}$ est un cercle de $\mathbf{C}$ ne contenant pas $f^{-1}(\infty)$. Démontrer les affirmations suivantes :
    (a) L'image $f(\mathcal{C})$ est un cercle.
    (b) Si $f^{-1}(\infty)$ appartient à $\mathcal{C}^+$, alors $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$. (Autrement dit : l'image du disque bordé par $\mathcal{C}$ est le disque bordé par $f(\mathcal{C})$.)
    (On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : si $\mathcal{C}$ est un cercle et z appartient à $\mathcal{C}^-$, alors toute droite passant par z rencontre $\mathcal{C}$ en deux points distincts z_1 et z_2 avec z appartenant au segment ouvert $]z_1, z_2[$.)

Partie D. Racines de A_zP

Dans cette partie, $z_1, \ldots, z_n$ désigneront n nombres complexes non nécessairement deux à deux distincts et ξ un nombre complexe vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \xi \neq z_i.$$

Si le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}$ est non nul, on définit (de manière unique) le nombre δ_ξ par l'égalité

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}. \tag{1}$$

On considère également le polynôme $P(X) = u \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$ avec u appartenant à $\mathbf{C}^*$.

1. Justifier que l'application
$$f \ : \ z \longmapsto \frac{1}{z - \xi}$$
est une homographie.
2. On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z_i \in \mathcal{C}^- \qquad \text{et} \qquad \xi \in \mathcal{C}^+.$$
Démontrer successivement que
   (a) $f(\mathcal{C}^-)$ est un disque ouvert qui ne contient pas 0 ;
   (b) $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}$ est un nombre complexe qui appartient à $f(\mathcal{C}^-)$;
   (c) le nombre δ_ξ est bien défini par (1) et appartient à $\mathcal{C}^-$.
3. Exprimer $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)}$ en fonction des nombres $\dfrac{1}{\xi - z_i}$ $(i \in [\![1, n]\!])$ puis en déduire que, si $P'(\xi)$ est non nul, alors δ_ξ est bien défini par (1) et vérifie
$$\delta_\xi = \xi - n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)}.$$
4. On considère un nombre complexe z vérifiant
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z \neq z_i.$$
   (a) Montrer que
$$z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j$$
si et seulement si le degré de A_zP est strictement inférieur à $n - 1$.
   (b) Montrer que l'ensemble des racines du polynôme A_zP est la réunion
$$\{z_i, \ i \in [\![1, n]\!] \ : \ P'(z_i) = 0\} \cup \{\xi \in \mathbf{C} \setminus \{z_i, \ i \in [\![1, n]\!]\} \ : \ \delta_\xi = z\}.$$
5. On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z_i \in \mathcal{C}^- \quad \text{et} \quad z \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^+.$$
Démontrer que toutes les racines du polynôme A_zP appartiennent à $\mathcal{C}^-$.

Partie E. Apolarité.

Dans cette partie, on considère deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de degré n :

$$P = u\prod_{i=1}^{n}(X - z_i) \quad \text{et} \quad Q = v\prod_{i=1}^{n}(X - z'_i)$$

avec u et v appartenant à $\mathbf{C}^*$.
On dira que P est *apolaire par rapport à* Q si, en utilisant les notations précédentes :

$$A_{z'_1}A_{z'_2}\cdots A_{z'_n}P(X) = 0.$$

On utilise toujours la convention décrite dans la partie B, question 2 : $A_{z'_n}$ est vu comme application de $\mathbf{C}_n[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-1}[X]$, $A_{z'_{n-1}}$ est vu comme application de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}_{n-2}[X]$, $\ldots$,$A_{z'_1}$ est vu comme application de $\mathbf{C}_1[X]$ dans $\mathbf{C}$.

1. On suppose que P est apolaire par rapport à Q. Montrer que, si $\mathcal{C}$ est un cercle tel que

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z_i \in \mathcal{C}^-$$

   alors il existe i appartenant à $[\![1, n]\!]$ tel que z'_i appartienne à $\mathcal{C}^-$.
2. Soient a et b deux nombres complexes distincts. Montrer qu'il existe n nombres complexes $b_0, \ldots, b_{n-1}$ que l'on calculera, tels que, pour tout polynôme du type

   $$T(X) = a_0 + \binom{n-1}{1}a_1X + \cdots + \binom{n-1}{n-2}a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-1}X^{n-1},$$

   on ait

   $$\int_0^1 T(a + s(b-a))\,\mathrm{d}s = a_0b_{n-1} - \binom{n-1}{1}a_1b_{n-2} + \binom{n-1}{2}a_2b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}b_0.$$

   Avec les notations précédentes, on pose

   $$\Delta(X) = b_0 + \binom{n-1}{1}b_1X + \cdots + \binom{n-1}{n-2}b_{n-2}X^{n-2} + b_{n-1}X^{n-1}.$$

3. Montrer que $\Delta(X) = c((X-a)^n - (X-b)^n)$ où c est une constante que l'on déterminera.
   Soit P appartenant à $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(a) = P(b)$. On note

   $$P'(x) = a_0 + \binom{n-1}{1}a_1X + \cdots + \binom{n-1}{n-2}a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-1}X^{n-1}.$$

   et on désigne par $t_1, \ldots, t_{n-1}$ les racines de P' comptées avec multiplicité.
4. En admettant l'égalité

   $$(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}A_{t_1}A_{t_2}\cdots A_{t_{n-1}}\Delta(X) =$$
   $$a_0b_{n-1} - \binom{n-1}{1}a_1b_{n-2} + \binom{n-1}{2}a_2b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}b_0$$

   démontrer que Δ est apolaire par rapport à P' puis en déduire le théorème 1.

FIN DU PROBLÈME