Groupe « mathématiques dynamiques » – IREM DE LYON
Tangentes et courbes exponentielles.

1 Fiche prof

Niveau. Classes de terminales.

Connaissances mathématiques. Tangentes à une courbe, fonction exponentielle.

Techniques geogebra.
- Définition des objets usuels (courbe, point sur courbe, tangente à une courbe, point d'intersection, distance).
- Enregistrer les valeurs prises par un objet des fenêtres graphique/algèbre dans une colonne du tableur (en vue de conjecturer une formule).
- Utilisation des commandes du calcul formel pour amorcer la partie démonstration (l'utilisation du calcul formel facilite ici la gestion par les élèves de la présence de paramètres).

2 Le sujet

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel non nul k, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_k : x \longmapsto \exp(kx)$.
On nomme $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k.
Soit a un réel (fixé).
On note A_k le point d'abcisse a de la courbe $\mathcal{C}_k$.
On nomme $\mathcal{T}_k$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en A_k.
On nomme C le point de l'axe des abscisses ayant même abscisse que A_k.
Et on nomme B_k le point d'intersection de l'axe des abscisses avec $\mathcal{T}_k$.

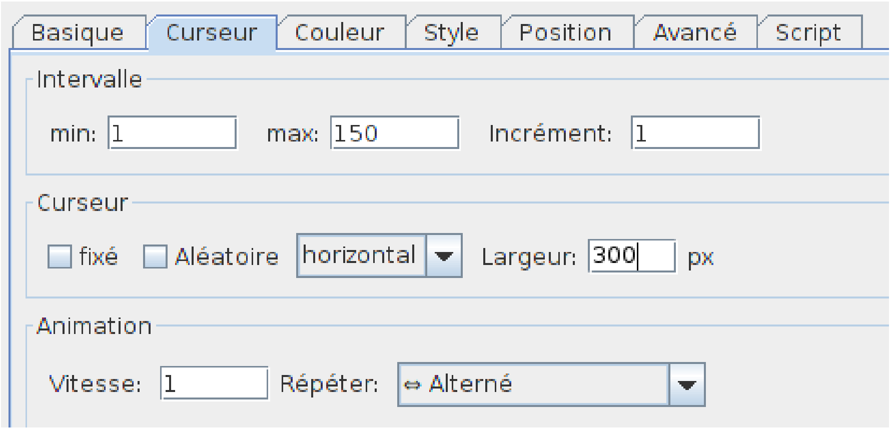
1. Définir un curseur k prenant des valeurs entières, la courbe $\mathcal{C}_k$ puis construire un point A sur la courbe.
2. Définir ensuite la tangente en A à la courbe et le point B, point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
3. Définir en ligne de saisie le point C puis la variable CB=distance[C, B].
4. Enregistrer en colonne A du tableur les valeurs du curseur k et en colonne B les valeurs de CB.
5. Recommencer avec une autre valeur de a.
6. Qu'observe-t-on ? Émettre une conjecture sur l'expression de la distance CB_k en fonction de k.
7. Mener les calculs nécessaires à la démonstration de la conjecture précédente avec l'outil de calcul formel.
8. Rédiger intégralement la démonstration.

3 Éléments de techniques geogebra

1. On peut définir un curseur en ligne de saisie en tapant par exemple $k = 1$ dans cette ligne de saisie.

Saisie: `k=1`

On règle ensuite les paramètres par un clic droit sur l'objet (propriétés).



On définit de même la fonction $f : x \longmapsto \exp(kx)$ en ligne de saisie.

Saisie: `f(x)=exp(k*x)`

On peut ensuite définir un point A sur la courbe de f par la commande suivante (ou par les menus graphiques) :

Saisie: `A=Point[f]`

2. On peut obtenir la tangente (et son tracé) par la commande suivante (ou par les menus graphiques) :

   Saisie: `T=Tangente[A,f]`

   Puis le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses par la commande suivante (ou par les menus graphiques) :

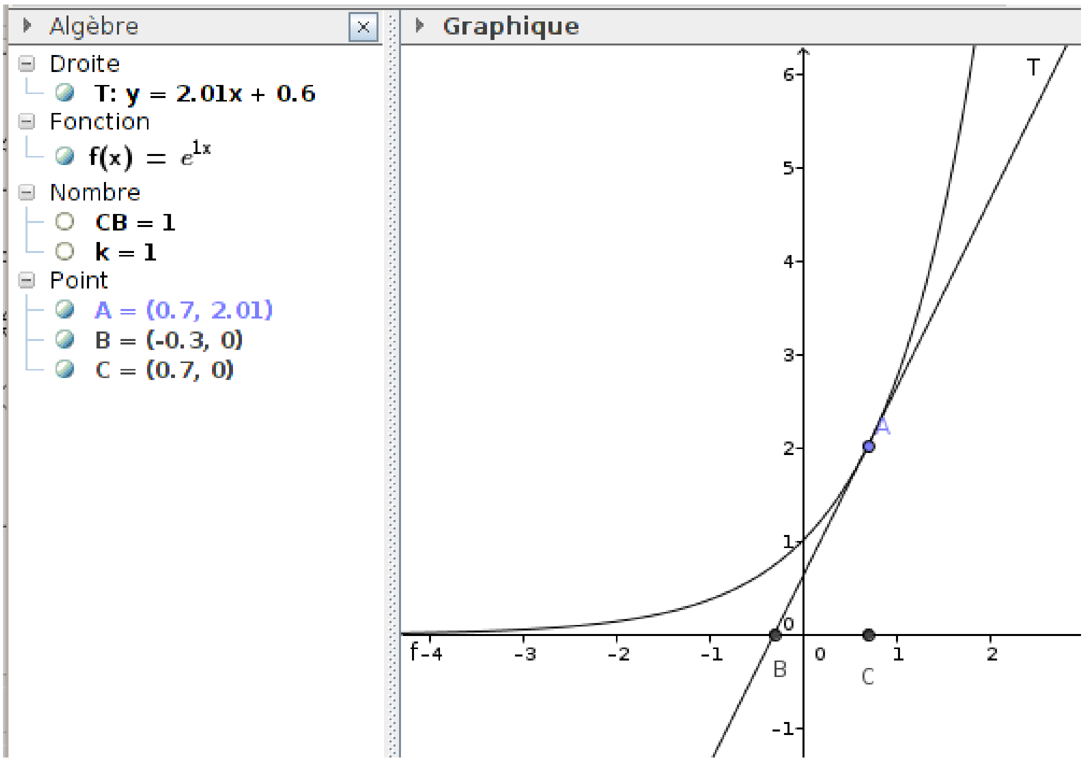
   Saisie: `B=Intersection[axeX, T]`

3. On définit d'abord le point $C\,(x_A\ ,\ 0)$.

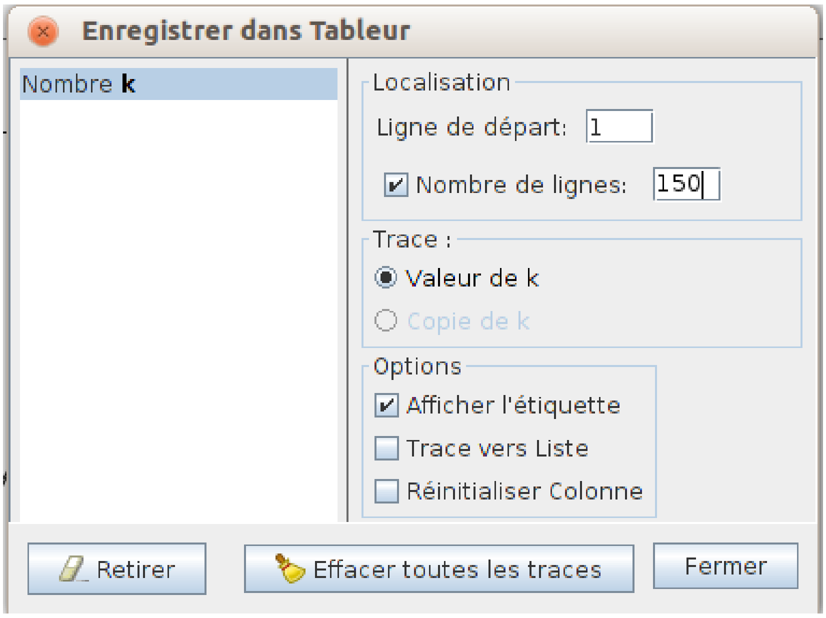
   Saisie: `C=(x(A),0)`

   puis la distance CB :

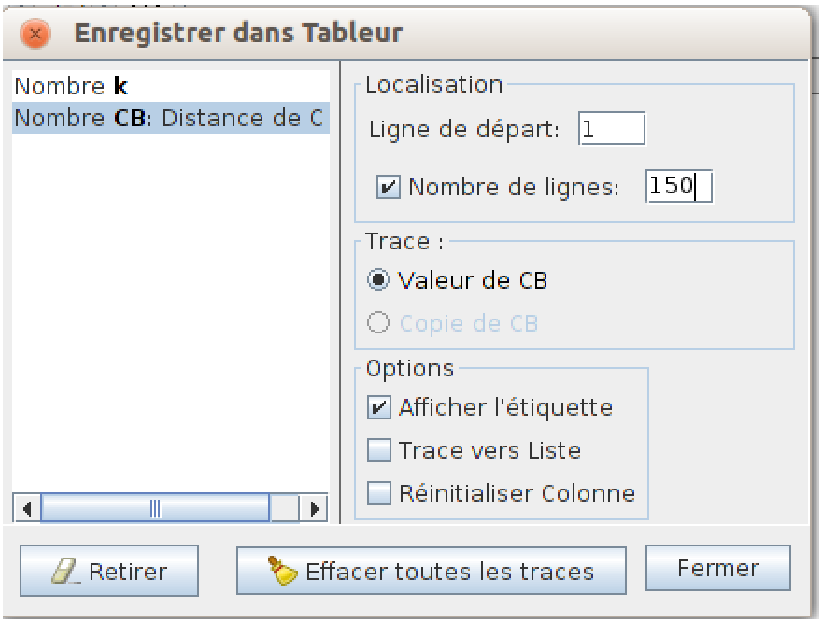
   Saisie: `CB=Distance[C,B]`



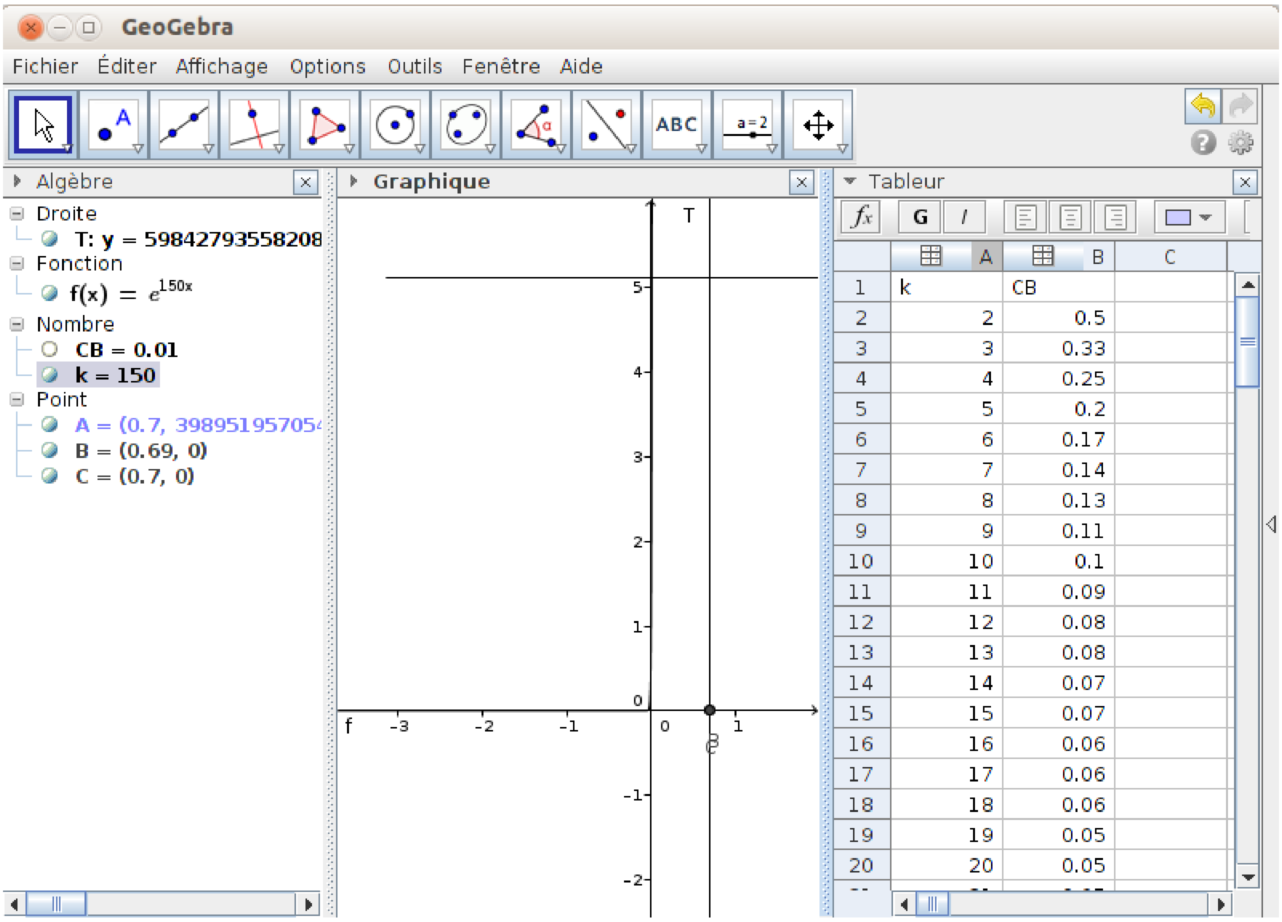
4. Enregistrer en colonne A du tableur les valeurs du curseur k et en colonne B les valeurs de CB.
   Ouvrons tout d'abord le tableur (menu Affichage/Tableur).
   Ensuite clic droit sur k, sélectionner « enregistrer dans tableur », règler de façon à pouvoir enregistrer toutes les valeurs de k :



   puis clic droit sur CB et sélectionner de même enregistrer dans tableur et régler de même.



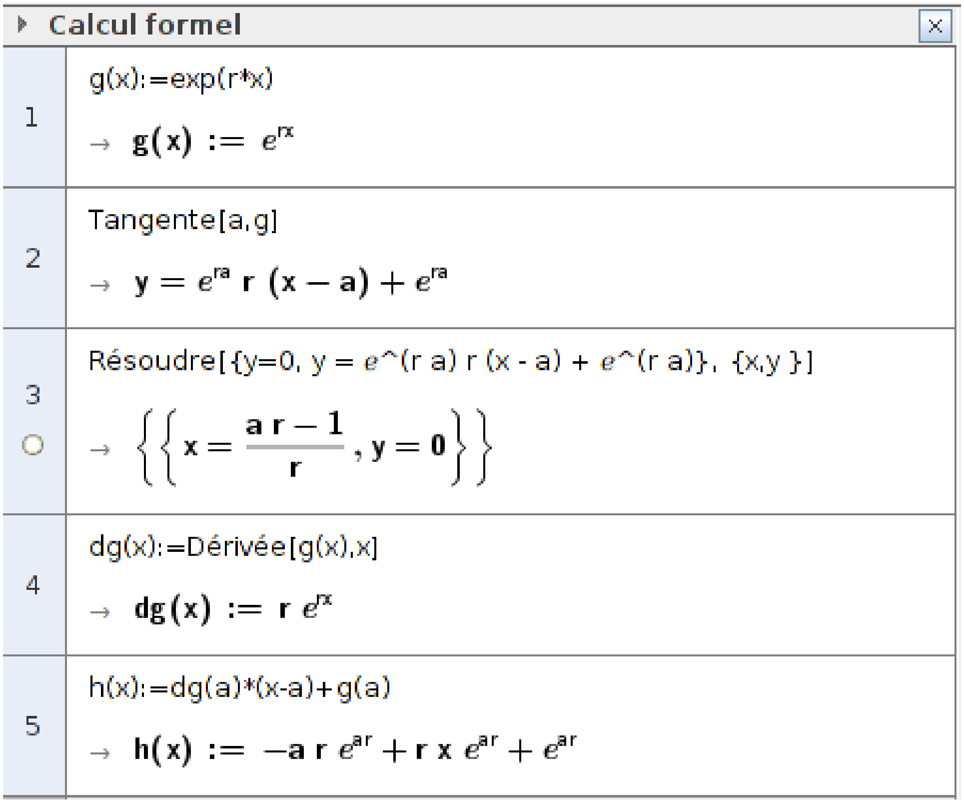
On tire ensuite le curseur k vers la droite (lentement, sinon beaucoup de valeurs de k sont sautées) : les valeurs successives de k et CB s'enregistrent dans les deux premières colonnes de la feuille tableur.



5. On obtient les mêmes résultats avec une autre valeur de $a = x_A$. La distance CB_k semble donc ne pas dépendre de a.

6. On conjecture $CB_k = \frac{1}{k}$, conjecture « renforcée » en entrant la formule =1/A2 en cellule C2 puis en tirant cette formule vers le bas : on obtient une colonne C identique à la colonne B.

7. Dans la fenêtre de calcul formel, on peut entrer les commandes suivantes :



Remarque 1. Pour écrire l'expression y = e^(r a) r (x − a) + e^(r a) dans le système en ligne 3, il suffit de cliquer sur cette même expression en ligne 2.

Remarque 2. Dériver et résoudre un système peut également être obtenus en passant par les menus de la fenêtre de calcul formel.