Notions traitées : Séries téléscopiques. Calcul des sommes de séries. Séries géométriques. Utilisation des critères de convergence. Inégalité de Hölder et espaces ℓ^p. Dualité des espaces ℓ^p.

1 Calculs de sommes de séries

Exercice 1.1. Calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right)$ (*Indication :* justifier que l'on peut permuter l'ordre des sommations).
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1,\, n\neq p} \frac{1}{n^2-p^2}$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
4. – En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction logarithme, déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x).$$
– Retrouve-t-on exactement le même résultat à l'aide des propriétés des séries entières ?
5. Application des séries de Fourier au calcul des sommes :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2 Application des critères de convergence

Exercice 2.1. Vérifier que les termes généraux des séries suivantes sont équivalents. Donner ensuite la nature de ces séries :
$$\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}.$$

Exercice 2.2. Soit f une fonction de classe C^1 dans $[1,+\infty[$, telle que l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} |f'(t)|\, dt$ est convergente. Démontrer que $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Application : Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n^a}$ est-elle convergente ?

Exercice 2.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro.

Exercice 2.4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs qui tend vers l'infini. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge et $\sum a_n u_n$ diverge.
(*Indication :* considérer $u_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$).

Exercice 2.5. On se propose de démonter le critère de Gauss (qui est une variante du critère de Raabe–Duhamel : *si* (a_n) *est une suite de réels positifs tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + b_n, \qquad \textit{avec} \quad \sum |b_n| < \infty,$$
alors $\sum a_n$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

1. Démontrer que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\alpha} = 1 + c_n, \qquad \text{avec} \quad \sum |c_n| < \infty.$$
2. Démontrer que $p := \prod_{n=1}^{\infty} 1 + c_n$ converge.
3. Démontrer l'équivalent pour $N \to \infty$, $a_N \sim p a_1 N^{-\alpha}$ et conclure.

Exercice 2.6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $(2k)!! = \prod_{i=1}^{k}(2i)$ et $(2k-1)!! = \prod_{i=1}^{k}(2i-1)$. Démontrer que la série $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ diverge.

3 Espaces ℓ^p

Exercice 3.1. Soit $1 < p < \infty$. On considère deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes.

1. Démontrer l'inégalité de Hölder
$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\Big| \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q\Big)^{1/q}, \qquad 1 < p, q < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
(*Indication :* on commencera par démontrer que $\forall\, a, b \geq 0$ on a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Ensuite l'on peut se ramener au cas $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q = 1$).
2. Pour toute suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\|u\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\Big)^{1/p}$. Démontrer que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur l'espace ℓ^p, où $\ell^p = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \|u\|_p < \infty\}$.
(*Indication :* appliquer l'inégalité de Hölder à $\|u+v\|_p^p = \sum_n |u_n + v_n|^{p-1}|u_n + v_n|$).
3. Comparer les espaces ℓ^{p_1} et ℓ^{p_2}, pour $1 < p_1 < p_2$.
4. Démontrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.
5. Soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$. On se propose de démontrer que le dual topologique de ℓ^q, noté $(\ell^q)^*$, s'identifie isométriquement à ℓ^p.
   – Soit $\varphi \in \ell^p$. Démontrer que $f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) f(n)$ définit une application linéaire et continue : $\ell^q \to \mathbb{C}$. Quelle est la norme de cette application linéaire ?
   – On note $(\ell^q)^*$ l'ensemble des application linéaires continues : $\ell^q \to \mathbb{C}$, muni de la norme usuelle : $\forall\, F \in (\ell^q)^*$, $\|F\|_{(\ell^q)^*} := \sup_{f\in\ell^q,\, f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|_q}$.
   Démontrer que l'application $L \colon \ell^p \to (\ell^q)^*$, définie par $L(\varphi)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) f(n)$, est une isométrie linéaire.
   – Démontrer que si $F \in \ell^q$, alors il existe $\varphi \in \ell^p$ telle que $F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) f(n)$. Conclure que $L \colon \ell^p \to (\ell^q)^*$ est surjective.

Exercice 3.2. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs, non nuls, positifs et tels que la série $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ converge. On définit la suite (v_n) en posant $v_0 = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

– Montrer l'inégalité $\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} u_n v_n$.
(*Indication :* $u_n = n v_n - (n-1) v_{n-1}$. Établir ensuite $v_n^2 - 2u_n v_n \leq (n-1)v_{n-1}^2 - n v_n^2$).
– Montrer l'inégalité de Hardy : $\sum_{n\geq 1} {v_n}^2 < 4\sum_{n\geq 1} u_n^2$.
– En considérant des troncatures de la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$, montrer que dans l'inégalité ci-dessus la constante 4 est la meilleure possible.