Notions traitées : Bornes sup et inf. Convergence et divergence des suites. Suites adjacentes. Limites supérieure et inférieure d'une suite. Suites monotones. Valeurs d'adhérence. Suites sub-additives. Parties denses dans $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Sommes de Césaro. Suites récurrentes.

1 Bornes Sup et Inf

Exercice 1.1.

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions suivantes :

1. majorants/minorants de X.
2. borne supérieure/borne inférieure de X.
3. plus grand/plus petit élément (ou maximum/minimum) de X.

Déterminer s'ils existent la borne supérieure et le maximum de X dans les cas suivants :

1. $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.
2. $X = [0, 1[\cap\mathbb{Q}$.
3. $X = \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Même question avec la borne inférieure et le minimum.

Exercice 1.2. Démontrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}\colon x^2 < 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.3. (Convergence et divergence des suites)

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$
2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0.$$
3. Soit u_n une suite complexe telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lambda$. Démontrer que si $\lambda > 1$ alors la suite u_n diverge et si $\lambda < 1$ alors $u_n \to 0$. Que peut-on dire si $\lambda = 1$?

Exercice 1.4 (Théorème des gendarmes)**.** Démontrer que $\sum_{k=2}^{n-2} 1/\binom{n}{k} \to 0$ pour $n \to \infty$. En déduire la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1/\binom{n}{k}$.

2 Suites de Cauchy, suites adjacentes

Exercice 2.1.

1. Démontrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge en observant que la suite des sommes partielles $S_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$ ne vérifie pas la condition de Cauchy.
2. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$
Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Montrer que (u_n) est convergente.

3. (Irrationalité de e). Soit $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Démontrer que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. (*Indication :* démontrer que $v_n = u_n + 1/(n\, n!)$ est décroissante. En supposant $e \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, estimer $q!(e - u_q)$).

3 Limites supérieure et inférieure d'une suite

Exercice 3.1.

1. Rappeler la définition de limite supérieure et de limite inférieure d'une suite de réels.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. Comparer $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ avec $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.
   Comparer $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$ et $(\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

Exercice 3.2. Soit (u_n) une suite de réels positifs sub-additive, c'est-à-dire telle que $u_{n+p} \leq u_n + u_p$ pour tout $n, p \geq 0$. Démontrer que la suite $\frac{u_n}{n}$ converge vers le réel $a = \inf_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$. (*Indication :* Pour $n \geq m \geq 1$, considérer la division éuclidienne de n par m : $n = mp + r$ et en déduire que $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_m}{m} \ldots$).

4 Valeurs d'adhérence

Exercice 4.1.

1. Soit (u_n) une suite complexe ayant une seule valeur d'adhérence $a \in \mathbb{C}$. La suite converge-t-elle vers a ?
2. (Une application du théorème de Bolzano–Weierstrass). Démontrer qu'une suite complexe bornée admettant une seule valeur d'adhérence est convergente.
3. Construire, si cela est possible, des suites réelles (u_n) telle que l'ensemble V des valeurs d'adhérence est $V = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$.

Exercice 4.2. Soit $\theta > 0$. On suppose que $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel.

1. Démontrer que le sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ engendré par θ et 2π, c'est-à dire :
   $$G = \{p\theta + 2q\pi \colon p, q \in \mathbb{Z}\}.$$
   est partout dense dans $\mathbb{R}$. (*Indication :* poser $a = \inf G^+$, où $G^+ = \{g \in G \colon g > 0\}$ et démontrer que $a = 0$ en utilisant que $\mathbb{R}$ est archimédien).
2. Démontrer que la suite $\cos(\theta n)$ admet tous les réels de $[-1, 1]$ comme valeurs d'adhérence.
3. Soit $G' = \{p\theta + 2q\pi \colon p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer que $\mathbb{R}^+$ est contenu dans l'adhérence de G'.
4. Démontrer que si $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel alors la suite $\sin(\theta n)$ admet tous les réels de $[-1, 1]$ comme valeurs d'adhérence.

5 Sommabilité au sens de Césaro

Exercice 5.1 (Le théorème de Césaro)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe qui converge vers un nombre réel (ou complexe) ℓ. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k, \qquad n \geq 1.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\geq 1}$ converge aussi vers ℓ (on dit dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ). Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 5.2 (Applications du théorème de Césaro)**.**

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$, alors
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ell.$$
(*Indication :* on pourra calculer $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$).
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente au sens de Césaro vers ℓ. Supposons de plus que $\lim_{n\to+\infty}(n(u_n-u_{n-1}))=0$. Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

6 Suites définies par récurrence

Exercice 6.1 (moyennes géométriques et arithmetique)**.** Soient a et b deux réels tels que $a>b>0$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0=a$, $b_0=b$ et
$$\forall\, n\in\mathbb{N}\colon a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

1. Démontrer que a_n est croissante et que b_n est décroissante.
2. Démontrer que $|a_n-b_n|\le\frac{1}{2^n}|a-b|$. Conclure que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

Exercice 6.2. Étudier la convergence des suites récurrentes de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$ suivantes. La fonction f est-elle contractante aux voisinage de ses points fixes ? Les points fixes de f sont-ils attractifs ?

1. (Suites d'Héron). Soit $a>0$, p un entier ≥ 2 et $u_0\in]0,\infty[$. On pose
$$\forall\, n\in\mathbb{N}\colon\quad u_{n+1}=\frac{1}{p}\Big[(p-1)u_n+\frac{a}{u_n^{p-1}}\Big].$$
2. $u_0\in[0,\infty[$ et, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=\frac{2}{1+u_n^2}.$$

Exercice 6.3 (Une récurrence implicite)**.** Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'équation $\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{x^i}{i!}=0$ admet une unique solution réelle α_n.
2. Démontrer que la suite (α_n) diverge.