Notions traitées : Calcul des sommes. Séries téléscopiques. Séries géométriques. Estimations du reste. Critères de convergence. Intégrales impropres absolument convergentes. Comparaison avec une intégrale. Développements asymptotiques des sommes. Le factoriel.

1 Quelques séries dont on sait calculer la somme

Exercice 1.1. Retrouver les sommes des séries suivantes :

1. Séries téléscopiques :
$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{10}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n-1} = \ln 2.$$
2. Utilisations des séries géométriques :
$$\sum_{n=100}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1.$$
3. Application de la formule de Taylor-Lagrange :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e.$$
4. Application des séries de Fourier au calcul des sommes :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2 Comparaison série-intégrale

On rappelle le critère classique :
Si $f\colon [n_0, \infty[\to \mathbb{R}$ *est décroissante et positive, alors* $\sum f(n)$ *et* $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ *sont de même nature.*
L'exercice suivant fournit un critère alternatif.

Exercice 2.1. Soit $f\colon [n_0 \to \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} |f'(t)|\,dt$ est convergente. On se propose de démontrer que $\sum f(n)$ et $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

1. On note $[t]$ la partie entière du réelle t, et $\{t\} = t - [t]$ sa partie décimale. Démontrer l'identité
$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) = \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt + \int_{n_0}^{N} \{t\} f'(t)\,dt. \tag{*}$$
2. Conclure.
(*Indication :* Si $\sum f(n)$ converge, on pourra montrer d'abord que $\exists \lim_{N\to\infty} \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt$, et ensuite que $\forall\, 0 < x < 1$, $\lim_{N\to\infty} \int_{N}^{N+x} f(t)\,dt = 0$).

Exercice 2.2. Donner la nature des séries
$$\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}, \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

3 Utilisation du théorème d'Abel

Exercice 3.1.

1. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + (-1)^n/\sqrt{n})$?
2. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}.$$

Exercice 3.2. On rappelle que si Re(s) > 1 alors la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge. On étudie ici le cas $s = 1 + i\theta$, où $\theta \in \mathbb{R}^*$:

1. Démontrer que $\sum 1/n^{1+i\theta}$ diverge.
   (*Indication :* appliquer l'exercice 2.1).
2. Démontrer que si (a_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle, alors $\sum a_n/n^{1+i\theta}$ converge.
   (*Indication :* on pourra utiliser $(*)$).

4 Un critère de Gauss

Exercice 4.1. On se propose de démonter le critère de Gauss : *si (a_n) est une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + b_n, \qquad \textit{avec} \quad \sum |b_n| < \infty,$$

alors $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1. Démontrer que
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1 + c_n, \qquad \text{avec} \quad \sum |c_n| < \infty.$$
2. Démontrer que $p := \prod_{n=1}^\infty 1 + c_n$ converge.
3. Démontrer l'équivalent pour $N \to \infty$, $a_N \sim p a_1 N^{-\alpha}$ et conclure.

Exercice 4.2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $(2k)!! = \prod_{i=1}^k (2i)$ et $(2k-1)!! = \prod_{i=1}^k (2i-1)$. Démontrer que la série $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ diverge.

5 Développements asymptotiques des sommes

Exercice 5.1. Soit $\alpha > 1$. Démontrer que le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ vérifie $R_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 5.2. Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que $H_n - \ln n \to \gamma$, où γ est une constante réelle.
2. Démontrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.
   (*Indication :* poser $t_n = u_n - \gamma$ et trouver d'abord un équivalent pour $t_{n-1} - t_n$ et appliquer l'exercice précédent).
3. En réitérant la même méthode, démontrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 5.3. (Intégrales de Wallis). On pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$.

1. Démontrer que $n a_n = (n-1) a_{n-2}$ et en déduire que $n a_n a_{n-1} = \pi/2$.
2. En déduire que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n)}}$.

3. Démontrer que $a_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.4. (Formule de Stirling).

1. Soit $x_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n) + n$. On pose $u_n = x_n - x_{n-1}$. Démontrer que $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ et en déduire que (x_n) converge.
2. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $n! \sim k n^{n+1/2} e^{-n}$.
3. En calculant de deux manières différentes un équivalent pour $\binom{2n}{n}$ (on pourra utiliser le résultat de l'exerice précédent), conclure que $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.