Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Oral
Année 2012–2013

# Calcul approché d'intégrales

Voici une version radicale de la leçon. Pour une présentation plus classique, voici l'original.

## I Énoncés

### 1° Définition des méthodes

#### a) Contexte et but

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a<b$. Plutôt que de son intégrale, on cherche une valeur approchée de la *valeur moyenne* de $f$.

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

#### b) Subdivisions

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\},\quad x_i^{(n)} = a + i\frac{b-a}{n}.$$

On remarque au passage que l'on a :

$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\},\quad x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et } x_i^{(n)} = x_{2i}^{(2n)}.$$

Lorsque $n$ est fixé sans ambiguïté, on remplacera $x_i^{(n)}$ par $x_i$.

*Remarque.* Dans cette leçon, on s'appuie toujours sur une subdivision *régulière* de l'intervalle d'intégration. D'autres méthodes utilisent d'autres subdivisions, dont on ne parlera plus :
– subdivision aléatoire pour la méthode dite ≪ Monte-Carlo ≫ ;
– subdivision dont les points s'accumulent aux bords de l'intervalle pour la méthode de ≪ quadrature de Gauss ≫– voir CAPES 2000.

#### c) Principe des méthodes

On présente cinq méthodes désignées par une lettre majuscule. La méthode $X$ consiste à définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont la limite est $I$.
L'idée de chacune des méthodes consiste à remplacer, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction $f$ par une fonction ≪ simple ≫, plus précisément affine par morceaux ou polynomiale par morceaux, dont on calcule explicitement l'intégrale.
Grâce à cette idée, on trouve pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une famille de coefficients $p_i^{(n)}$ $(0 \le i \le n)$ ou $p_j^{(n)}$ $(0 \le j \le 2n)$ ($p$ comme *poids*), et on définit :

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} p_i^{(n)}\, f(x_i^{(n)}) \quad \text{ou} \quad X_n = \sum_{j=0}^{2n} p_j^{(n)}\, f(x_j^{(2n)}).$$

*Remarque.* Pour que la formule soit exacte ($X_n = I$) si $f$ est constante, il faut imposer :

$$\sum_{i=0}^{n} p_i^{(n)} = 1, \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{2n} p_j^{(n)} = 1.$$

Ainsi, une méthode est une *moyenne pondérée* des valeurs de $f$ aux points de la subdivision.

#### d) Définition précise des méthodes

Voici les poids $(p_i^{(n)})$ associés aux différentes méthodes.

| subdivisions | $x_0^{(2n)}$ <br> $x_0^{(n)}$ | $x_1^{(2n)}$ | $x_2^{(2n)}$ <br> $x_1^{(n)}$ | $x_3^{(2n)}$ | $\cdots$ <br> $\cdots$ | $x_{2n-3}^{(2n)}$ | $x_{2n-2}^{(2n)}$ <br> $x_{n-1}^{(n)}$ | $x_{2n-1}^{(2n)}$ | $x_{2n}^{(2n)}$ <br> $x_n^{(n)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rectangles à gauche $R_n^{(g)}$ | $\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\cdots$ | | $\frac{1}{n}$ | | $0$ |
| rectangles à droite $R_n^{(d)}$ | $0$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\cdots$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{n}$ |
| trapèzes $T_n$ | $\frac{1}{2n}$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\cdots$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{2n}$ |
| $T_{2n}$ | $\frac{1}{4n}$ | $\frac{1}{2n}$ | $\frac{1}{2n}$ | | $\cdots$ | | $\frac{1}{2n}$ | $\frac{1}{2n}$ | $\frac{1}{4n}$ |
| point médian $M_n$ | | $\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{n}$ | |
| Simpson $S_n$ | $\frac{1}{6n}$ | $\frac{2}{3n}$ | $\frac{1}{3n}$ | $\frac{2}{3n}$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3n}$ | $\frac{1}{3n}$ | $\frac{2}{3n}$ | $\frac{1}{6n}$ |

*Exemple.* Voici comment lire ce tableau. La suite de la méthode des trapèzes est définie par :

$$T_n = \frac{1}{2n} f(x_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(x_i^{(n)}) + \frac{1}{2n} f(x_n^{(n)}).$$

On remarque que le calcul de $T_{n+1}$ après celui de $T_n$ demande le calcul de $n-1$ nouvelles valeurs de la fonction $f$ ; par comparaison, le calcul de $T_{2n}$ demande $n$ valeurs supplémentaires de la fonction, mais le gain de précision obtenu en passant de $T_n$ à $T_{2n}$ est bien meilleur (voir ci-dessous). En pratique, on calculera donc en général des valeurs de la forme $T_{2^k}$.

*Remarque.* On voit facilement les formules :

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2}, \quad S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{T_n + 2M_n}{3}.$$

Le lien entre $S_n$ et $T_n$ sera un peu expliqué plus bas.

### 2° Majoration de l'erreur

*Remarque.* Pourquoi *doit-on* majorer l'erreur ? Eh bien, j'ai dans ma boîte à outils une méthode *très* rapide pour estimer la valeur moyenne d'une fonction : c'est 2. C'est très rapide, mais sans doute peu précis. À quel point les méthodes précédentes sont-elles meilleures ? C'est la majoration de l'erreur qui le dit.

À chaque méthode est associé un entier $d$, de sorte que la méthode est exacte (i.e. $X_n = I$) pour une fonction polynômiale de degré $d$ (par morceaux, i.e. sur chaque intervallee $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$) et pour une fonction assez régulière, l'erreur $|X_n - I|$ est majorée par $C/n^{d+1}$, où $C$ est une constante qui ne dépend que de $f$.

Pour le voir, on commence par travailler sur un intervalle $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$, ou, ce qui revient au même aux notations près, on commence par travailler avec $n = 1$ sur l'intervalle $[a, b]$, puis on fait la somme des erreurs commises sur chaque intervalle.

**Théorème.** *Les quatre suites* $(R_n^{(g)})$, $(R_n^{(d)})$, $(T_n)$, $(M_n)$, $(S_n)$ *convergent vers* $I$. *Plus précisément, on a les majorations d'erreurs*[1] *suivantes, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ :

– *si* $f$ *est* $\mathcal{C}^1$, *alors :* $\left|I - R_n^{(g)}\right| \leq \dfrac{(b-a)||f'||_\infty}{2\,n}$ *et* $\left|I - R_n^{(d)}\right| \leq \dfrac{(b-a)||f'||_\infty}{2\,n}$ ;

– *si* $f$ *est* $\mathcal{C}^2$, *alors :* $|I - T_n| \leq \dfrac{(b-a)^2||f''||_\infty}{12\,n^2}$ ;

– *si* $f$ *est* $\mathcal{C}^2$, *alors :* $|I - M_n| \leq \dfrac{(b-a)^2||f''||_\infty}{24\,n^2}$ ;

– *si* $f$ *est* $\mathcal{C}^4$, *alors :* $|I - S_n| \leq \dfrac{(b-a)^4||f^{(4)}||_\infty}{2880\,n^4}$.

*Démonstration.* Ici, on ne prouve que la première partie. Pour les suites $(R_n^{(g)})$, $(R_n^{(d)})$ et $(M_n)$, cela résulte de la définition de l'intégrale de Riemann. Pour $(T_n)$, on utilise la relation $T_n = (R_n^{(g)} + R_n^{(d)})/2$ pour tout $n$. Pour $(S_n)$, on utilise la relation $S_n = (4T_{2n} - T_n)/3$ pour tout $n$.

### 3° Un équivalent de l'erreur (situation générique)

Si on suppose la fonction encore plus régulière, on peut obtenir un équivalent, voire un développement asymptotique de l'erreur. Voici un exemple simple que l'on peut peut-être retrouver *in situ*. Pour simplifier sans perte réelle de généralité, on suppose que $[a,b] = [0,1]$.

**Proposition.** *Soit* $f$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(1) \neq f(0)$. *Alors :*

$$\left(\int_0^1 f - R_n^{(g)}\right) \sim \frac{f(1)-f(0)}{2n}.$$

*Démonstration.* La première étape consiste à décomposer $R_n^{(g)}$ comme somme d'intégrales de fonctions constantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f - R_n^{(g)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t)-f(x_k))\,\mathrm{d}t : \quad \text{Taylor-Lagrange saute aux yeux !} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left((t-x_k)f'(x_k) + \frac{(t-x_k)^2}{2}f''(\theta_{t,k})\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t-x_k)^2}{2}f''(\theta_{t,k})\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f'(x_k)}{2n^2}}_{u_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t-x_k)^2}{2}f''(\theta_{t,k})\,\mathrm{d}t}_{v_n}.
\end{aligned}$$

Ce qui est joli, c'est que le terme $u_n$ ressemble fort à une somme de Riemann pour $f'$ :

$$2nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (f(1)-f(0)).$$

1. Attention, on a déjà divisé par $b-a$ !

Sous l'hypothèse que $f(1) \neq f(0)$, il vient : $u_n \sim \sum(f(1)-f(0))/2n$. Le terme $v_n$ se majore aisément :

$$|v_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t-x_k)^2}{2} ||f''||_\infty \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{||f''||}{6n^3} = \frac{||f''||}{6n^2}.$$

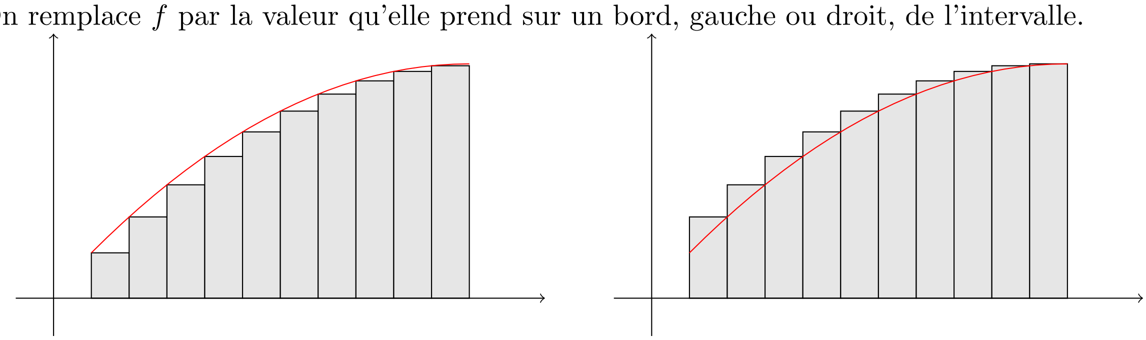
On en déduit que $v_n$ est négligeable devant $u_n$, puis la proposition.

*Remarque.* On voit bien que si on poussait le développement de Taylor un peu plus loin, on obtiendrait un équivalent de $v_n$, etc.

# II Présentation détaillée

## 1° Méthode des rectangles

On remplace $f$ par la valeur qu'elle prend sur un bord, gauche ou droit, de l'intervalle.



Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace l'intégrale de $f$ par l'aire de l'un des rectangles ci-dessus, ce qui donne les formules :

$$R_n^{(g)} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(x_i), \quad R_n^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i).$$

**Proposition.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\mu_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$, on a :*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f - R_n^{(g)} \right| \leq \frac{\mu_1(b-a)}{2\,n}, \qquad \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f - R_n^{(d)} \right| \leq \frac{\mu_1(b-a)}{2\,n}.$$

Pour faire la preuve, on commence par le cas $n=1$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)-f(a)| \leq \mu_1(x-a),$$

puis on intègre :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) \right| = \left| \int_a^b (f(x)-f(a))\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \mu_1(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_1(b-a)^2}{2}.$$

Pour $n$ quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque $[x_i, x_{i+1}]$, puis l'inégalité triangulaire : on trouve $n$ termes d'erreur $\mu_1(b-a)^2/n^2$, ce qui donne la proposition.

*Exemple.* Appliquons à la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x)$. Pour $n$ fixé, on a :

$$R_n^{(g)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

L'exemple est classique pour illustrer les sommes de Riemann : cette suite converge vers $\ln 2$. On a $\mu_1 = 1$, donc la proposition donne mieux : $|R_n^{(g)} - \ln 2| \leq 1/(2n)$.

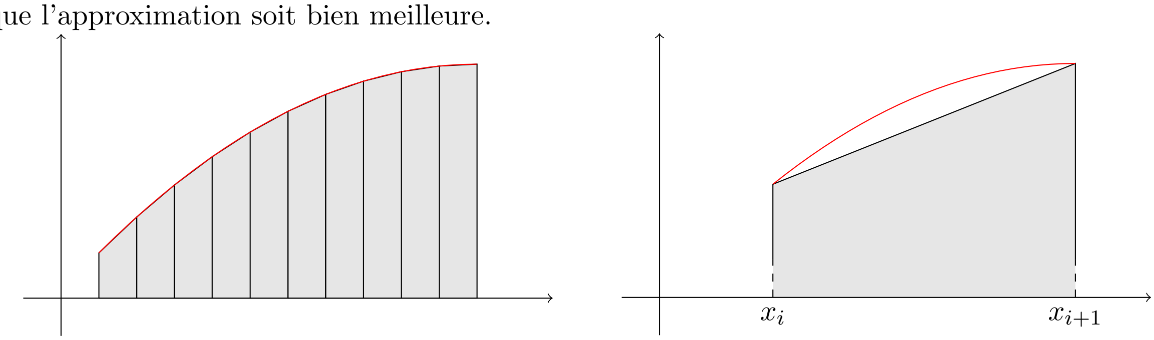
*Exemple* (v. 2). On reprend le même. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelle valeur de $n$ la méthode des rectangles donne-t-elle une précision de $10^{-k}$ ?

## 2° Méthode des trapèzes

Idée naïve à partir de la précédente : comme on ne voit pas de raison de privilégier la droite par rapport à la gauche, on se dit qu'on va faire la moyenne des méthodes des rectangles, i.e. approximer $f$ par la moyenne des valeurs qu'elle prend aux deux extrêmités. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2}.$$

Interprétation graphique : la moyenne des aires des rectangles est aussi l'aire du trapèze délimité par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que $f$ en $x_i$ et en $x_{i+1}$. Ceci justifie moralement que l'approximation soit bien meilleure.




**Proposition.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $\mu_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, on a :*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f - T_n \right| \leq \frac{\mu_2 (b-a)^2}{12\, n^2}.$$

**Preuve (assez naturelle)**

On commence par $n = 1$. On doit majorer :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Une idée de preuve simple : considérer $b$ comme une variable, et étudier la fonction définie par :

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a) \quad (x \in [a,b]).$$

Il importe de remarquer que $g(a) = 0$. La fonction $g$ est dérivable et on a :

$$g'(x) = f(x) - \frac{f'(x)}{2}(x-a) - \frac{f(a)+f(x)}{2} \quad (x \in [a,b]).$$

Il importe de remarquer que $g'(a) = 0$. La fonction $g'$ est dérivable et on a :

$$g''(x) = f'(x) - \frac{f''(x)}{2}(x-a) - \frac{f'(x)}{2} - \frac{f'(x)}{2} = -\frac{f''(x)}{2}(x-a) \quad (x \in [a,b]).$$

On majore $f''$, et on conclut par intégrations :

$$|g'(x)| = \int_a^x |g''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{\mu_2}{2}(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{\mu_2}{4}(x-a)^2,$$

$$|g(x)| = \int_a^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{\mu_2}{4}(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mu_2}{12}(x-a)^3 \quad (x \in [a,b]),$$

et c'est fini pour $n = 1$ ! Pour passer à $n$ quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et on somme.

**Autre idée de preuve (cf. Simpson)**
Pour $n = 1$, on part de l'expression :

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on montre par deux intégrations par parties bien pensées que c'est (à une constante multiplicative près) l'erreur $\int_a^b f - T_1$.

*Exemple.* On reprend le même : $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0,1]$. On a facilement : $\mu_2 = 2$, et :

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

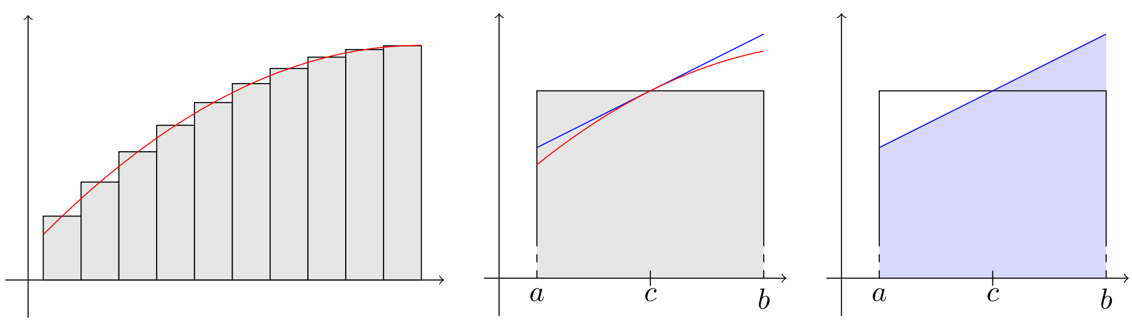
On peut donc annoncer fièrement : $|T_n - \ln 2| \leq 1/(6n^2)$. En fait, on a : $(T_n - \ln 2) \sim 1/(16n^2)$.

*Exemple* (v. 2). On reprend le même. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelle valeur de $n$ la méthode des trapèzes donne-t-elle une précision de $10^{-k}$ ?

**3° Méthode du point médian ou de la tangente**

L'idée ici est graphiquement limpide. Si $n = 1$, on remplace la courbe de $f$ par la tangente à la courbe au point médian, dont l'abscisse est $c = (a+b)/2$. L'équation de la tangente est :

$$y = f(c) + (x-c)f'(c).$$




On constate que l'aire du trapèze délimité par la tangente est égale à l'aire du rectangle délimité par la droite d'ordonnée $f(c)$, car la différence symétrique est formée de deux triangles isométriques. (La formule (§) ci-dessous se/le démontre analytiquement.) On approxime l'intégrale sur $[a,b]$ par :

$$(\S) \qquad (b-a)\,f(c) = \int_a^b (f(c) + (x-c)f'(c))\,\mathrm{d}x.$$

Passant à $n$ quelconque, et appliquant ces idées à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on pose donc :

$$M_n = \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\,f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right).$$

L'intérêt de cette interprétation de la méthode du point médian par la tangente, c'est de donner lieu à une preuve très naturelle.

**Proposition.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $\mu_2 = \sup_{[a,b]}|f''|$, on a :*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f - M_n\right| \leq \frac{\mu_2(b-a)^2}{24\,n^2}.$$

**Preuve (naturelle s'il en est !)**
On commence par $n = 1$. On note $c = (a + b)/2$ et on exploite (§). On doit majorer :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\ f(c) = \int_a^b \big(f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)\big)\ \mathrm{d}x.$$

Miracle : on reconnaît ici le début d'une formule de Taylor ! Plus précisément, on déduit de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)| \leq \frac{\mu_2}{2}(x-c)^2.$$

Il vient alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\ f(c)\right| \leq \frac{\mu_2}{2}\int_a^b (x-c)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_2(b-a)^3}{24}.$$

Le passage à $n$ quelconque est standard.

*Exemple.* On reprend le même : $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0,1]$. On a vu : $\mu_2 = 2$.

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{2i+1}{2n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2}{2(n+i)+1} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2}{2k+1}.$$

On peut donc annoncer : $|T_n - \ln 2| \leq 1/(12n^2)$. En fait, on a : $(T_n - \ln 2) \sim -1/(32n^2)$.

*Exemple* (v. 2). On reprend le même. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelle valeur de $n$ la méthode du point médian donne-t-elle une précision de $10^{-k}$ ?

## 4° Méthode de Simpson

On sait que la méthode de Simpson consiste à remplacer, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction $f$ par un polynôme de degré 2 qui prend les mêmes valeurs que $f$ en $x_i$, $x_{i+1}$ et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Problème : retrouver les coefficients !

### a) Première méthode pour retrouver la formule

*Idée.* Pour une raison un peu mystérieuse, la méthode de Simpson s'obtient à partir de la méthode des trapèzes par la méthode dite d'accélération de la convergence de Romberg.

Supposons que l'inégalité de la méthode des trapèzes soit un équivalent (on ne sait pas le démontrer, d'ailleurs c'est faux pour certaines fonctions $f$, mais ce n'est pas grave, car on indique seulement un procédé heuristique) (peut-être que $C = 1/12$, mais on s'en fiche) :

$$T_n \sim \frac{C}{n^2}.$$

Pour faire intervenir $\frac{x_i^{(n)}+x_{i+1}^{(n)}}{2} = x_{2i+1}^{(2n)}$, on veut faire jouer $T_{2n}$. Plus précisément, on veut faire une combinaison linéaire de $T_n$ et $T_{2n}$ de la forme $S_n = \alpha\, T_n + \beta\, T_{2n}$ telle que :
– $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ (c'est le minimum !) ;
– $S_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (pour pouvoir dire qu'on a accéléré la convergence).
La première condition impose : $\alpha + \beta = 1$. Pour la deuxième, constatons que :

$$T_{2n} \sim \frac{C}{4n^2},$$

et donc :

$$\alpha T_n + \beta T_{2n} = \alpha \frac{C}{n^2} + \beta \frac{C}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = C\,\frac{\alpha + \frac{\beta}{4}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On est amené à prendre $\alpha + \frac{\beta}{4} = 0$. Ainsi, on est conduit à choisir :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha + \frac{\beta}{4} = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3}, \\ \beta = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}.$$

Il se trouve que « c'est » la méthode de Simpson.

*Remarque.* Vu qu'on a supprimé le terme en $1/n^2$, on s'attend à ce que la méthode donne un terme d'erreur en $1/n^3$. En réalité, on verra que l'erreur est en $1/n^4$.

### b) Deuxième méthode pour trouver la formule

**Lemme** (inutile !)**.** *Étant donnés trois réels distincts $a$, $b$, $c$ et trois réels quelconques $y_a$, $y_b$, $y_c$, il existe un unique polynôme $P$ de degré au plus 2 tel que*

$$P(a) = y_a, \quad P(b) = y_b, \quad P(c) = y_c.$$

*Démonstration.* Un tel polynôme est déterminé par trois coefficients : $P(t) = ut^2 + vt + w$ pour tout $t$. Les conditions du lemme se traduisent par un système linéaire en $u$, $v$ et $w$ dont la matrice est (la transposée d')une matrice de Vandermonde : le système est donc de Cramer.

*Démonstration* (variante)*.* Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation $\mathrm{ev}_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur cet espace. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \left(P(a), P\left(\frac{a+b}{2}\right), P(b)\right) \end{array}$$

est linéaire. Or, elle est injective, car un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes est nécessairement nul. Par égalité des dimensions à la source et au but, il en résulte qu'elle est bijective.

*Remarque.* En comparant les deux preuves, on en déduit que le déterminant de Vandermonde n'est pas nul lorsque les points d'interpolations sont distincts.

**Proposition** (Formule des trois niveaux)**.** *Soient deux réels $a < b$ et $c = (a+b)/2$. Alor, pour tout polynôme $P$ de degré au plus 2 :*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} P(a) + \frac{2}{3} P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} P(b).$$

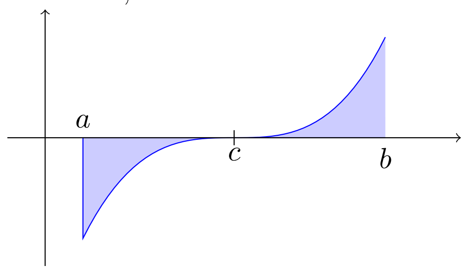
*Idée.* On comprend la formule de la proposition comme une expression de la forme linéaire

$$I : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \qquad P \mapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b P$$

comme combinaison linéaire de $(\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_c, \mathrm{ev}_b)$.

*Démonstration.* Il suffit de tester la formule sur la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

*Remarque.* Il se trouve que la formule des trois niveaux est en fait valable pour les polynômes de degré 3 également. Ce n'est pas un hasard : tout polynôme de degré 3 peut s'écrire sous la forme : $P(t) = k(t-c)^3 + P_2(t)$, où $k$ est un réel et $P_2$ est un polynôme de degré 2. Or, l'intégrale de $(t-c)^3$ vaut zéro, comme l'attestent le dessin et le calcul suivants.




$$\int_a^b (t-c)^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-c)^4}{4}\right]_a^b = 0.$$

C'est ce qui explique que l'erreur est en $1/n^4$ et non en $1/n^3$.

### c) Formule pour la méthode de Simpson

On utilise la proposition sur $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ (rappelons que $(x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)})/2 = x_{2i+1}^{(2n)}$) et on fait la somme sur $i$, ce qui conduit à poser :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{6} f(x_i^{(n)}) + \frac{2}{3} f(x_{2i+1}^{(2n)}) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}^{(n)}) \right).$$

Le coefficient associé à $x_{2i+1}^{(2n)}$ est $2/3$, car ce point n'appartient qu'à un intervalle. Le coefficient associé à $x_i^{(n)}$ est $1/6 + 1/6 = 1/3$ si $1 \le i \le n-1$, car $x_i^{(n)}$ apparaît une fois comme extrêmité gauche et une fois comme extrêmité droite d'un intervalle ; enfin c'est $1/6$ si $i = 0$ ou $i = n$. Ainsi :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{6}\, f(x_0^{(n)}) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^{(n)}) + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f\left( \frac{x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)}}{2} \right) + \frac{1}{6}\, f(x_n^{(n)}) \right].$$

### d) Majoration de l'erreur

**Proposition.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et $\mu_4 = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|$, on a :*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f - S_n \right| \le \frac{\mu_4 (b-a)^4}{2\,880\, n^4}.$$

*Esquisse de preuve.* Pour $n = 1$, on part de l'expression :

$$\int_a^b (x-a)^2 (b-x)^2 f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

et quatre intégrations par parties montrent que c'est (à peu près) l'erreur $\int_a^b f - (b-a) S_1$.

*Exemple* (v. 2). On reprend le même. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelle valeur de $n$ la méthode de Simpson donne-t-elle une précision de $10^{-k}$ ?