ENS ULM 1983 MATH 1: ÉNONCÉ

Les candidats sont invités à lire soigneusement la liste des définitions qui précède l'énoncé des questions.

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte du soin apporté à la rédaction.

On rappelle que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls, des rationnels, des réels, des complexes.

Partie I

I.1. Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$, on a
$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

I.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que si la suite $\sin n\alpha\pi$ a une limite quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, la suite $\cos n\alpha\pi$ est aussi convergente (on pourra écrire $\sin(n+1)\alpha\pi$ à l'aide de $\sin n\alpha\pi$ et de $\cos n\alpha\pi$). En déduire que la suite $\sin n\alpha\pi$ n'est pas convergente.

Partie II

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par
$$B_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$
où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

II.1. Calculer les polynômes
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k}.$$

II.2. On pose $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Calculer les polynômes :
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} r_k(x), \qquad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k r_k(x), \qquad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k(k-1) r_k(x).$$

En déduire l'égalité
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

II.3. On rappelle que la fonction f, continue sur $[0,1]$ est uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$, tel que pour $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ et $|x - y| \leqslant \eta_\varepsilon$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On pose $M = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :
$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x)$$
$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}$$

(on pourra considérer les k tels que $|k-nx| \leqslant n\eta_\varepsilon$ et ceux tels que $|k-nx| > n\eta_\varepsilon$.

II.4. En déduire que la suite des polynômes B_n converge uniformément vers f dans $[0,1]$ i.e. $N_\infty(f-B_n)$ tend vers 0 pour la norme infinie sur $\mathcal{C}([0,1]$.

Partie III

III.1. Montrer que pour tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}>0$, où q est un entier $\geqslant 1$, il existe une unique famille d'entiers $\{k,a_1,\dots,a_k\}$, $k\geqslant 1$, $a_1\geqslant 0$, $a_k>0$, $0\leqslant a_i<i$, pour tout entier i s'il en existe, tel que : $2\leqslant i\leqslant k$, telle que :

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{1!}+\frac{a_2}{2!}+\cdots+\frac{a_k}{k!}.$$

III.2. **a.** Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers telle que $0\leqslant a_k<k$ pour $k\geqslant 2$.
Montrer que la série $\sum \dfrac{a_k}{k!}$ est convergente.

b. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=p+2}^{+\infty}\frac{k-1}{k!}$ pour tout entier $p\geqslant 0$.

c. Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\alpha>0$. Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $\geqslant 0$, (a_k) telle que $a_1\geqslant 0$, pour tout $k\geqslant 2$, $0\leqslant a_k<k$ et

$$\alpha=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}.$$

III.3. Soit $l\in[-1,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(n!\alpha 2\pi)=l.$$

Partie IV

Soit : $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. On rappelle que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $a\mathbb{Z}$.

IV.1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $q_n>0$, et une suite (p_n), $p_n\in\mathbb{Z}$, telles que

$$\alpha q_n-2p_n\to 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

IV.2. Montrer que, pour tout $l\in[-1,1]$, il existe une suite strictement croissante d'entiers >0, q_n telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(q_n\alpha\pi)=l.$$

IV.3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n!e\pi)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3\sin^2(n!e\pi)$.

IV.4. On suppose $\alpha=\sqrt{2}$.

a. Montrer que pour tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ où q est un entier $\geqslant 1$, tel que : $|\sqrt{2}-\dfrac{p}{q}|\leqslant 1$, on a :

$$|q\sqrt{2}-p|\geqslant\frac{1}{(1+2\sqrt{2})q}.$$

b. Soit (q_n) une suite strictement croissante d'entiers >0 telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(q_n\sqrt{2}\pi)=0.$$

Montrer que, pour tout entier $k\geqslant 3$:

$$\lim_{n\to+\infty}q_n^k\sin^2(q_n\sqrt{2}\pi)=\infty.$$

Partie V

Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et une suite strictement croissante d'entiers $q_n > 0$ tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^k \sin(q_n \alpha\pi) = 0.$$

On cherchera α sous la forme $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$ et on déterminera une suite strictement croissante (k_n) d'entiers tels que $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k_p \\ 0 & \text{si } n \notin \{k_p\} \end{cases}$.

Partie VI

VI.1. Soit z un nombre complexe et α un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

À l'aide de l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique, transformer la somme $u_N = \sum_{n=0}^{N} \sin(n\pi\alpha) z^n$. Si $|z| < 1$ en déduire la limite de u_N quand $N \to +\infty$.

VI.2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k, a_1, \dots, a_k$ des nombres réels tels que $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $c_n = \sum_{p=1}^{k} a_p \sin(n\pi\alpha_p)$.

Montrer que pour tout z complexe, $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est convergente et a pour somme

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k} \frac{a_p z \sin \alpha_p \pi}{1 - 2z\cos\alpha_p\pi + z^2}.$$

VI.3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. Montrer que les coefficients a_p, $1 \leqslant p \leqslant k$, sont tous nuls.