1 Problème 1

La situation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
A et B sont deux points distincts dans le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tels que la droite (AB) ne passe pas par O.
C est un point de l'axe $\left(O;\vec{k}\right)$.
On considère un point M mobile sur la droite (AB) et on aimerait savoir s'il existe une position du point M tel que l'angle $\widehat{OMC}$ soit maximal.

Travail avec geospace

Pour mesurer un angle : Créer/Numérique/Calcul géométrique/Angle géométrique. Pour afficher sa mesure : Créer/Affichage/Variable numérique déjà définie.

1. Construire la figure dans geospace.
2. Conjecturer une réponse au problème.

2 Problème 2

La situation

$ABCD$ est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont même longueur a.
M étant un point mobile de la droite (AB), on aimerait savoir s'il existe une position de ce point M qui rende maximal l'angle $\widehat{CMD}$.

Travail sur geospace

Pour construire un tétraèdre régulier, on pourra penser aux outils cercle, sphère, plan médiateur.

1. Construire la figure dans un fichier geospace.
2. Quelle semble être la nature du triangle CMD ?
3. Conjecturer une réponse à la question de l'angle maximal.

3 Démonstration

Confirmer ou infirmer vos conjectures.

Pistes pour une résolution.

1. Pour le premier problème, on pourra penser à utiliser $\tan(\widehat{OMC})$.
2. Pour le second problème, on pensera à utiliser $\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{CMD}\right)$.

4 Construction d'un tétraèdre régulier

1. On commence par placer deux points A et B. On peut imposer qu'ils soient dans le plan xoy pour faciliter la suite.
2. Dans le plan xoy, on construit C tel que ABC soit équilatéral en utilisant des cercles de centre A et B dans le plan xoy.
3. Pour le point D, on peut :
   (a) construire les sphères $\mathscr{S}_A$, $\mathscr{S}_B$, $\mathscr{S}_C$ de centres respectifs A, B, C et de rayon AB. On construit deux cercles $\mathscr{S}_A \cap \mathscr{S}_B$, $\mathscr{S}_A \cap \mathscr{S}_C$ puis les points d'intersection de ces deux cercles.
   (b) On peut aussi construire la droite intersection des plans médiateurs de $[AB]$ et $[AC]$ puis les deux points d'intersection de cette droite avec la sphère de centre C et de rayon CA.
   (c) La droite précédente peut aussi être construite comme la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par l'isobarycentre de A, B, C. Cela demande que cette propriété du tétraèdre régulier ait été traitée au préalable.
4. On peut également définir les quatre sommets à l'aide de coordonnées si l'on pense que les élèves peuvent trouver (ou comprendre) l'argument suivant : la conjecture à faire est indépendante du choix des points A, B, C, D, tous les tétraèdres réguliers étant semblables.