

Situation 4 : Jeux de *pile* ou *face*

Un directeur de casino se propose d'installer le jeu suivant qui fonctionne avec une mise de 1 euro. Le jeu consiste à comparer deux séries de cinq lancers d'une pièce de monnaie équilibrée : l'une des séries est simulée par une machine et l'autre est construite par le joueur qui lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Si le joueur obtient le même nombre de *pile* que la machine, il reçoit 4 euros, sinon il perd sa mise. Le directeur du casino souhaite savoir si le jeu est équitable. Aidez-le !

Outils technologiques utilisés

- Tableur

Stratégies de résolution

- Simuler un grand nombre de jeux
- Rechercher la probabilité d'obtenir 0 P, 1P, 2P etc, lors d'une série de cinq lancers d'une pièce équilibrée

Compétences TICE sur tableur

- Coder un lancer et générer un nombre aléatoire
- Effectuer un comptage de cellules suivant une condition
- Effectuer un test logique
- Construire une feuille de calculs permettant de simuler un grand nombre de jeux (gestion des lignes et des colonnes)
- Calculer des effectifs, des fréquences
- Calculer une moyenne ou rentrer une formule pour l'espérance

Compétences mathématiques

- Élaborer une stratégie de simulation (compétence TICE et maths)
- Savoir reconnaître une situation d'indépendance
- Savoir reconnaître une loi binomiale et appliquer les connaissances du cours
- Recourir éventuellement à un arbre pondéré pour calculer une probabilité
- Savoir calculer une espérance
- Connaître la notion de « jeu équitable »

Avantages des TICE dans la résolution

Le tableur permet à l'élève de :

- S'approprier le problème
- Conforter ou invalider le choix d'un modèle
- Multiplier les essais dans un temps limité ce qui conduit à une conjecture rapide
- Avoir une attitude critique et réfléchie vis-à-vis de la conjecture
- Motiver le calcul exact
- Contrôler la cohérence des réponses obtenues d'une part lors de la simulation, d'autre part lors du calcul de la probabilité ($E(X) = -\frac{1}{64}$), et permettre de valider le choix du modèle

Prolongement possible

Envisager d'autres mises. Chercher une mise qui rend le jeu équitable.
Augmenter le nombre de lancers.

Un site à consulter et à faire connaître

www.statistix.fr

Mise en œuvre possible avec les élèves (niveau : terminale S)Séance en salle informatique

Recherche individuelle (un élève par ordinateur ; travail par groupe de deux)

La situation étant ouverte, un coup de pouce du professeur sera éventuellement nécessaire pour que les élèves puissent démarrer.

Les questions 1 et 2 suivantes, données au fur et à mesure selon les besoins, peuvent favoriser la démarche d'investigation de l'élève.

Question 1 Selon vous, la probabilité p que le joueur gagne est :

- | | |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> inférieure à 0,1 ? | <input type="checkbox"/> comprise entre 0,1 et 0,2 ? |
| <input type="checkbox"/> comprise entre 0,2 et 0,3 ? | <input type="checkbox"/> comprise entre 0,3 et 0,4 ? |
| <input type="checkbox"/> comprise entre 0,4 et 0,5 ? | <input type="checkbox"/> supérieure à 0,5 ? |

Que faire pour confirmer ou infirmer votre réponse, si vous en avez une, ou pour pouvoir en donner une ?

Question 2 Simulations

- A l'aide du tableur, simuler un jeu, c'est-à-dire deux séries de cinq lancers d'une pièce de monnaie équilibrée (l'une représentant la machine du casino et l'autre le joueur) puis tester si l'on obtient le même nombre de *pile* pour les deux séries.
- Simuler ce jeu un grand nombre de fois et calculer la fréquence d'obtention du même nombre de *pile* pour les deux séries.
- Estimer alors le gain moyen du joueur. Le jeu vous semble-t-il équitable ?

Comme le tableur ne suggère pas d'idée de preuve, il sera sans doute utile de donner un questionnement adapté pour aider l'élève à organiser les calculs.

Question 3 Calculs

On désigne par p la probabilité pour que le joueur gagne.

- Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu serait équitable.
- Calculer la probabilité pour que deux séries de cinq lancers d'une pièce de monnaie équilibrée conduisent à i *pile*, i étant un entier compris entre 0 et 5.
- En déduire une formule donnant p .
- Le jeu est-il équitable ?

Question complémentaire (qui peut faire, avec la question 3, l'objet d'un devoir libre)

Un autre jeu, toujours avec une mise de 1 euro, consiste à lancer dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Si le joueur obtient cinq pile, il reçoit 4 euros, sinon, il perd sa mise.

Pour le casino, quel est le jeu le plus intéressant en terme d'espérance de gain ?

Bilan de la situation 4 (Jeux de *pile* ou *face*)

La situation permet de répondre aux exigences des programmes (simulations ; fluctuations d'échantillonnages ; calcul de probabilités) en posant un problème concret et la simulation peut être faite dès la classe de seconde, la démonstration étant réservée au niveau terminale.

Dans cette situation, les compétences TICE et les compétences mathématiques sont intimement liées et s'enrichissent mutuellement.

La simulation n'apporte pas une réponse nette et peut laisser penser que l'espérance est nulle. Pourtant, pour le directeur du casino, il serait bon que l'espérance de gain du joueur (en seconde, moyenne des gains) soit négative pour que le jeu lui soit favorable, mais peu différente de 0 pour que le jeu attire un grand nombre de joueurs. Le manque d'évidence de la réponse obtenue par simulation motive ainsi la