Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2012–2013

Majorer, pinailler

Idée : Voici une batterie d'exemples où on met l'accent sur la majoration, sans se poser la question de savoir pourquoi on la veut. À charge du lecteur d'en déduire des principes.

I Situations simples

1° Avec des manipulations « algébriques »

a) (Inégalité triangulaire – fondamental...) À l'aide du « côté bien connu » de l'inégalité triangulaire, $|a-b| \leq |a|+|b|$, démontrer le « côté délaissé » : $\Big||a|-|b|\Big| \leq |a-b|$.

b) Application géométrique. Soit a, b, c trois réels positifs (ou nuls). Montrer que ce sont les longueurs des côtés d'un triangle du plan si et seulement si on a : $|b-c| \leq a \leq b+c$.
Trouver une condition analogue pour que quatre réels a, b, c, d soient les longueurs des côtés d'un quadrilatère.

c) (Quantité conjuguée.) Montrer que la suite $(\sqrt{n+37}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d) (Idem.) Calculer la 99$^{\text{e}}$ décimale de $(45+\sqrt{2024})^{2003}$.

e) (Idem + « un entier naturel non nul est ≥ 1 ».) Pour p, q entiers ≥ 1, on a :

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|q\sqrt{2}-p\right| \geq \frac{1}{(1+2\sqrt{2})q}.$$

f) (Pas idem.) Montrer que pour tout $0 \leq x \leq y$ on a : $0 \leq \sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$.

g) (Inégalité de Cauchy-Schwarz.) Soit E un espace vectoriel réel et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire euclidien sur E. Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquer que la fonction $\lambda \mapsto \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$ est un polynôme de degré 2. Avec son discriminant, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall u, v \in E, \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \, \langle v, v\rangle.$$

h) (Exemple.) Soit $m_1, \ldots, m_n > 0$. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a : $\left(\sum_{i=1}^n m_i\, x_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i\right)\left(\sum_{i=1}^n m_i\, x_i^2\right)$. (Prendre $u = (1, \ldots, 1)$.) (CAPES 1999.)

i) (Autre exemple.) On prend pour E l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ et $\langle u, v\rangle = \int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$. Écrire l'inégalité correspondante.

j) (Même idée.) Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, positive, telle que f'' soit majorée par $M \geq 0$. Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x, \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $f(x)+\lambda\, f'(x)+M\lambda^2/2 \geq 0$.
En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2\, f(x)\, M}.$$

k) (Formule du binôme.) Soit $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a^n \geq n(a-1)+1$.
Conséquences : $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$.

l) On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (voir ci-dessous). Montrer que pour $a > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

2° Avec des manipulations simples

a) Vérifier que $\sup_{t\in\mathbb{R}} 2t/(1+t^2) = 1$ de trois façons différentes : en utilisant $(t-1)^2$ et avec une ligne trigonométrique, enfin par une étude de fonctions. Cas d'égalité ?
Application : $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{x}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$.

b) La fonction $(a, x) \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$? Peut-on la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$?

3° **Avec une récurrence**

a) On considère une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Selon le sens de variation de f et le signe de $f(x) - x$, on étudie par récurrence la monotonie de $(u_n)_n$ et le signe de $u_n - \ell$, où ℓ est une solution de $f(x) = x$ (unique ou presque dans les bons cas). Exemples :

$$u_0 = \sqrt{3},\ f(x) = \sqrt{1+x} \quad u_0 = 8,\ f(x) = 6 + \sqrt{x}$$
$$u_0 = 3,\ f(x) = 2\frac{x-1}{x} \qquad u_0 = 3,\ f(x) = \frac{3}{2+x}$$

b) Soit $v_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{... + \sqrt{1}}}}$, i.e. $v_1 = 1$ et $v_n = \sqrt{n + v_{n-1}}$. Montrer que $v_n \leq n$. En déduire $v_n \leq \sqrt{2n}$ et la nature de $\sum 1/v_n$.

II Avec le sens de variation de fonctions

1° **À vue**

a) Faire une étude rapide des fonctions définies par les formules suivantes (définition, limites aux bords, surtout variations, *sans calcul de dérivée*) :

$$\sqrt{1+x},\ \frac{1}{\sqrt{1+x}},\ \sqrt{1-x},\ \frac{1}{\sqrt{1-x}},\ e^{-x^2},\ e^{-1/x},\ e^{1/(1-x)}.$$

b) Montrer que $\dfrac{1}{p+1} \leq \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{p}$ (CAPES 1988 entre autres).

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

d) On donne $0 < a < b$. Trouver les meilleures constantes possibles C et D telles que l'on ait

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{C}{x+a} \leq \frac{1}{x+b} \leq \frac{D}{x+a}.$$

e) Calculer $\displaystyle\sup_{x\geq 0, t\in\mathbb{R}} \frac{\cos(xt+\pi/4)}{1+x^2},\ \sup_{x>0, t\in\mathbb{R}} \frac{\cos(xt+\pi/4)}{1+x^2},\ \sup_{x,t\in\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/(1+t^2)}}{1+x+x^2}$.

f) Soit $x_n > 0$ le terme général d'une série convergente. On veut montrer que la série de terme général $y_n = x_n^{n/(n+1)}$ converge.
Vérifier que si $-\ln(x_n)/(n+1) \geq \ln 2$, alors $y_n \leq 2^{-n}$ et que dans le cas contraire, on a : $y_n \leq 2x_n$. En déduire que $y_n \leq 2^{-n} + 2x_n$ et conclure.

g) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = e^{-nx^2}/n^2$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} u_n(x)$; $\sup_{x\in\mathbb{R}} u_n'(x)$; $\sup_{x\geq a} u_n'(x)$ pour $a > 0$ donné. Qu'en déduit-on sur la convergence des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$?

2° **En utilisant la dérivée d'une fonction auxiliaire**

a) Montrer que pour $h \in [0, 1/2]$ on a : $(1-h)^{-1} \leq 1 + 2h$.

b) Montrer que pour $x < 1$ on a : $\frac{x}{x-1} \leq \ln(1-x) \leq -x$.

c) Comparer $\sin x$ et $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

d) **(Inégalité de Hölder.)** On donne $p \in [0,1]$ et $q = 1-p$. Montrer que pour $x, y > 0$ on a : $1 + x^p y^q \leq (1+x)^p(1+y)^q$. (Considérer $t \mapsto (t+x)^p(t+y)^q - t - x^p\, y^q$.)

En déduire que pour $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^q \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^q$.

e) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$ on a : $n^{t-2} \leq 6\dfrac{(n+2)^{t-1}}{n+1}$.
f) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = nxe^{-nx}\sin x$ sur $[0,\pi]$; sur $\mathbb{R}^+$; sur $\mathbb{R}$.

3° Par convexité

a) Montrer que $1+x \leq e^x$; que $e^{-x^2} \leq (1+x^2)^{-1}$; que si $x \geq -1$ on a : $\ln(1+x) \leq x$.
Amélioration : si $x \geq -1$ on a : $|\ln(1+x)| \leq |x|$.
b) (Classique à connaître.) Montrer que pour $t \in [0,\pi/2]$ on a : $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$.
En déduire que $\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi/2} Re^{-R^2\sin t}\,\mathrm{d}t = 0$.
c) Montrer que pour $y \geq 0$ on a : $y \leq \operatorname{sh} y$.
Application : si $z = x+iy$ avec $|z| \leq 1$, on a : $|\sin z|^2 \leq \operatorname{sh}^2 y/y^2$. En déduire enfin $\sup_{|z|\leq 1}|\sin z|$.
d) On se donne $a_1,\dots,a_n > 0$. Comparer $\sum_{i=1}^n a_i/n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$ et $\left(\sum_{i=1}^n a_i^{-1}/n\right)^{-1}$.

III Intervention de constantes

Il arrive qu'on ne puisse pas être aussi explicite que dans ce qui précède. On n'a alors que des inégalités « à partir d'un certain point » ou qui font intervenir une constante plus ou moins connue.

1° Intervention de constantes non eplicites mais presque quelconques

a) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\sqrt{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \leq \sqrt{1+\varepsilon}.$$

b) Soit f continue sur $\mathbb{R}$, admettant des limites en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
c) Soit f de classe C^1 sur un intervalle compact. Montrer que f est lipschitzienne.

Situation typique : on a une famille de fonctions/suites « de référence » et on veut comparer sa fonction/suite à l'une de celles-ci.

d) Soit $a > 1$, posons pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n/a^n$. En considérant u_{n+1}/u_n, montrer que u_n est majorée par une suite géométrique de raison $c \in]1,a[$ à partir d'un certain rang. En déduire la limite de $(u_n)_n$.
Application : montrer que $\lim_{x\to+\infty} x/a^x = 0$; que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$.
e) (Important.) En comparant la fonction intégrée à une exponentielle $e^{-a't}$ avec $0 < a' < a$, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at}t^b\,\mathrm{d}t$ converge pour $a > 0$ et tout b.
Etudier le cas des fonctions $e^{-at^\alpha}t^b\ln^c t$.

2° Intervention d'un paramètre intermédiaire

On introduit un paramètre, généralement grâce à une condition asymptotique, qui sert pendant le calcul et disparaît à la fin (en principe). Idée : « on coupe le problème en deux sous-problèmes que l'on traite séparément. En recollant les morceaux, on se débarrasse du paramètre intermédiaire. »
a) (Théorème de Cesaro.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que la suite des moyennes définie par $v_n = (u_0+\cdots+u_n)/n$ converge également vers ℓ.
D'abord, quitte à remplacer u_n par $u'_n = u_n - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$ (que devient v_n ?).
On veut donc montrer que $(v_n)_n$ tend vers 0.
Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait : $|u_n| \leq \varepsilon$. On écrit alors, pour $n \geq n_0$:

$$v_n = \frac{u_0+\cdots+u_n}{n} = \frac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n} + \frac{u_{n_0}+\cdots+u_n}{n}.$$

Le premier terme est majoré par ε pour $n \geq n_1$ convenable ; le deuxième l'est déjà. Le n_0 n'a servi que d'intermédiaire, on peut l'oublier et conclure.

IV Applications des formules de Taylor

On en a déjà vu : I1°j), III1°c)

1° Exemples immédiats

a) (Comme en terminale (d'avant) !) Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction de classe C^1 ayant un unique point fixe $\ell = f(\ell)$ tel que $\sup_{[a,b]} |f'(x)| < 1$. Montrer que la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ. À quelle vitesse ?
b) Déduire de la formule de Taylor-Lagrange l'inégalité :

$$\forall n \geq 1, \forall t \in [0,1], \quad 0 \leq (n+1)^t - n^t - t\,(n+1)^{t-1} \leq \frac{t-t^2}{2}\, n^{t-2} \leq \frac{1}{8}\, n^{t-2}.$$

2° Application aux développements en série

Idée : on considère le développement de Taylor comme le début d'un développement en série : il s'agit d'en contrôler le reste.
a) Soit, pour a réel, $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$.
Vérifier la convergence de l'intégrale pour tout $a \in \mathbb{R}$.
On écrit $(e^t - 1)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k+1)t} + e^{-(n+1)t}/(1 - e^{-t})$.
En intégrant la première somme on obtiendra le développement souhaité. On s'intéresse donc à

$$R_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} \frac{\sin(at)}{1 - e^{-t}}\, \mathrm{d}t.$$

Notons $\varphi(t) = \sin(at)/(1 - e^{-t})$. Vérifier que φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $R_n(a)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Conclure.
b) Soit f une fonction de classe C^∞ telle que pour tout n on ait : $f^{(n)} \geq 0$ sur un voisinage fixé $V =]-\alpha, \alpha[$ de 0. Soit $x > 0$. On écrit le reste de la formule de Taylor-reste intégral sous la forme :

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Avec la formule de Taylor et l'hypothèse, montrer que $x \mapsto R_n(x)/x^n$ est croissante sur $V \cap \mathbb{R}^+$.
En déduire que $R_n(x') \leq (x'/x)^n R_n(x) \leq (x'/x)^n f(x)$ pour $0 \leq x' < x$, et que $R_n(x')$ tend vers 0 si n tend vers l'infini.
On conclut : pour $0 \leq x' < x$, on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\, x'^n$.
Procéder de même pour $x < 0$. Ainsi, f est somme de sa série de Taylor. Donner un contre-exemple en supposant seulement que $f^{(n)}(0) \geq 0$.

V Cas des intégrales

Ingrédients de base :
- si $f \leq g$ alors $\int f \leq \int g$.
- si f intégrable, $|\int f| \leq \int |f|$.
- pour majorer $\int_a^b$, on fixe $c \in]a,b[$ et on majore séparément $\int_a^c$ et $\int_c^b$. (Idée du fameux « paramètre intermédiaire » ci-dessus.)

1° Trivialités

a) En intégrant t^{-1} entre n et $n+1$, montrer que $(n+1)^{-1} \leq \ln(1 + n^{-1}) \leq n^{-1}$.
b) A l'aide du critère de Cauchy, montrer qu'une intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

2° Découpage de l'intégrale

a) Soit f continue positive sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}=\max_{[a,b]} f$.
(Un peu hypocrite ici, il s'agit d'une minoration. Choisir $c\in[a,b]$ où le maximum M de f est atteint. On fixe $\varepsilon>0$, on choisit α tel que $|f(t)-M|\le\varepsilon$ pour $|t-c|\le\alpha$ et on *minore* alors $\int_a^b f^n\ge\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f^n\ge 2\,\alpha\,(M-\varepsilon)^n$, quantité dont la puissance $1/n$ème est proche de M.
b) Soit f continue sur $[0,1]$ avec $\lim_{t\to1} f(t)=0$. On fixe $\varepsilon>0$ et α tel que si $|t-1|\le\alpha$, on a $|f(t)|\le\varepsilon$. Majorer $\int_\alpha^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Majorer d'autre part $\int_0^\alpha nt^n f(t)\,\mathrm{d}t$ en faisant intervenir $M=\sup_{[0,1]}|f|$.

Montrer que pour n assez grand, on peut rendre $\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t$ inférieur à 2ε. Ainsi, α a disparu...
Conséquence : pour f continue quelconque, on a : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t=f(1)$.