

Moyenne qualitative au collège

Agnès Rico

Juin 2019

Plan

- 1 *Motivation*
- 2 *Lien avec modélisation décision multicritère*
- 3 *la capacité*
- 4 *L'intégrale de Sugeno*
- 5 *Des exemples*
- 6 *Quelques propriétés*
- 7 *Interprétation*

- Arrêt des notes sur $[0, 20]$ au collège :
 - Comment évaluer avec des échelles qualitatives ?
 - Comment interpréter les résultats ?
- L'intégrale de Sugeno (1973) :
 - intégrale qualitative :
 - on a juste besoin d'une échelle finie ordonnée,
 - elle utilise le minimum et le maximum ;
 - elle calcule une note globale à partir de note locale par rapport à des critères en prenant en compte l'importance des critères.
 - elle est équivalente à des Règles : Si ... alors ...
- Différents points de vue :
 - Donner une note à une interrogation:
on veut agréger les notes des exercices mais on ne peut pas utiliser l'addition.
on se propose d'utiliser l'intégrale de Sugeno qui prend en compte l'importance des exercices et des groupes d'exercices.
 - Expliquer les notes obtenues par un élève.

Echelle qualitative

- **Echelle d'évaluation pour les notes :**
très faible, faible, moyenne, bonne, très bonne.
- **Importance des exercices :**
très peu important, peu important, moyennement important, important, très important, .

Les deux échelles sont représentables par une échelle commune qui est l'ensemble ordonné $1 < 2 < 3 < 4 < 5$.

C'est l'hypothèse de commensurabilité.

Tableau correspondance

1	tres faible	tres peu important
2	faible	peu important
3	moyen	moyennement important
4	bonne	important
5	tres bonne	tres important

Lien avec la décision multicritère

Des **objets**, **alternatives** sont évalués par rapport à plusieurs **critères**. Ici les étudiants sont notés pour chaque exercice. Les exercices sont les critères.

Exemple : un élève, un contrôle de 3 exercices, une échelle {1, 2, 3, 4, 5}

Geoffroy est évalués suivant les trois critères : exo1, exo2 et exo3

Geoffroy sera représenté par un vecteur (g_1, g_2, g_3) :

g_1 note de l'exo 1, g_2 note de l'exo 2, g_3 note de l'exo 3.

- On va agréger les notes de chaque exercice pour avoir une note globale, i.e., une note au contrôle,
- en prenant en compte l'importance des exercices et des groupes d'exercices,
- pour cela on va utiliser une fonction μ appelée *capacité*.

Capacité

- La capacité attribue une valeur à chaque ensemble de critères (ici à chaque ensemble d'exercices)
- Cette valeur est donnée sur l'échelle d'évaluation des critères (commensurabilité).
- La capacité est une fonction croissante :
 - Si un ensemble A est inclus dans un ensemble B alors la capacité de A est plus petite que la capacité de B .
 - La capacité de l'ensemble vide est la plus petite valeur de l'échelle. Pour nous cette valeur est 1,
 - la capacité de l'ensemble de tous les exercices est la plus grande valeur de l'échelle. Pour nous cette valeur est 5.

Exemples une interrogation avec trois exercices

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	3 <i>moyennement important</i>	2 <i>peu important</i>	2 <i>peu important</i>	4 <i>important</i>	4 <i>important</i>	3 <i>moyennement important</i>	5 <i>important</i>

- l'exercice exo_1 est plus important que les autres
- l'importance de deux exercices est plus grande que le max des importances de chacun.

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	3	2	5	3	5	5	5

- Cette capacité est un cas particulier :
L'importance d'un groupe d'exercices est égale au maximum des importances de chaque exercice.
- C'est une possibilité souvent notée Π .

Exemples une interrogation avec trois exercices

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	1	1	1	3	2	4	5

- seuls les ensembles qui ont au moins deux exercices ont une importance différente du minimum de l'échelle.
- on met un poids plus important pour l'ensemble $\{exo_2, exo_3\}$.

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	1	1	1	1	1	1	5

- seuls l'ensemble de trois exercices a une importance différente du minimum de l'échelle.

Intégrale de Sugeno

- Pour un ensemble de critères (exercices) A on calcule :
 - sa capacité $\mu(A)$
 - l'évaluation minimale de l'objet sur cet ensemble de critères :
 $\min_{\text{critere de } A} g_{\text{critere}}$
 - le minimum des valeurs précédentes.

$$\min(\mu(A), \min_{\text{critere de } A} g_{\text{critere}})$$

- L'intégrale de Sugeno est le maximum des valeurs obtenues pour tous les ensembles de critères :

$$\max_{\text{tous-les-ensembles-de-criteres } A} \min(\mu(A), \min_{\text{critere de } A} g_{\text{critere}})$$

Une interrogation avec 3 exercices

Capacité pour trois exercices:

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	3 <i>classique</i>	2 <i>peu</i>	2 <i>peu</i>	4 <i>important</i>	4 <i>important</i>	3 <i>classique</i>	5 <i>important</i>

Notes des exercices et note obtenue avec l'intégrale de Sugeno :

	$\{exo_1\}$	$\{exo_2\}$	$\{exo_3\}$	IntegraledeSugeno
<i>notes</i>	2 <i>faible</i>	1 <i>tresfaible</i>	5 <i>tresbonne</i>	2 <i>faible</i>

La note 5 a été obtenue pour un exercice d'importance 2
les autres notes sont inférieures à 2.

	$\{exo_1\}$	$\{exo_2\}$	$\{exo_3\}$	IntegraledeSugeno
<i>notes</i>	5 <i>tresbonne</i>	5 <i>tresbonne</i>	1 <i>tresfaible</i>	4 <i>bonne</i>

La note de 5 est obtenue pour les exercices exo_1 et exo_2 dont l'ensemble à une capacité de 4.
l'autre note vaut 4.

	$\{exo_1\}$	$\{exo_2\}$	$\{exo_3\}$	IntegraledeSugeno
<i>notes</i>	1 <i>tresfaible</i>	5 <i>tresbonne</i>	5 <i>tresbonne</i>	3 <i>moyenne</i>

La note de 5 est obtenue pour les exercices exo_2 et exo_3 dont l'ensemble à une capacité de 3.
l'autre note vaut 1.

Quelques propriétés

- L'intégrale de Sugeno calcule un score compris entre la note minimale des exercices et la note maximale des exercices.
- Si tous les exercices ont la même note la note globale de l'interrogation sera cette même valeur.
- L'intégrale de Sugeno est croissante par rapport à l'évaluation de chaque exercice.
- La capacité d'un ensemble d'exercice correspond à la note globale qu'aurait une interrogation avec une note maximum sur les exercices de cet ensemble et la note minimale possible pour les autres.
- Si on change la capacité sur l'ensemble des exercices on change la note globale de l'interrogation.
- Il n'est pas nécessaire de donner la capacité pour tous les ensembles d'exercices. On peut le faire sur les ensembles que l'on juge important. On les appelle les ensembles focaux.

Les ensembles focaux

Les ensembles focaux A sont les ensembles d'exercices A qui ont une capacité strictement supérieure à la capacité des ensembles d'exercices qu'ils contiennent.

transformée de Moebius qualitative

$\mu_{\#}(E) = \mu(E)$ si $\mu(E) > \max_{B \subset E} \mu(B)$ et 0 sinon.

Les ensembles focaux sont les ensembles E tels que $\mu_{\#}(E) > 0$.

Seuls les ensembles focaux sont nécessaires pour calculer l'intégrale de Sugeno.

Exemple d'ensembles focaux

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	exo_1 exo_2, exo_3
μ	3 <i>classique</i>	2 <i>peu</i>	2 <i>peu</i>	4 <i>important</i>	4 <i>important</i>	2 <i>classique</i>	5 <i>important</i>

- Les ensembles focaux sont :
 $\{exo_1\}$, $\{exo_2\}$, $\{exo_3\}$, $\{exo_1, exo_2\}$, $\{exo_1, exo_3\}$ et $\{exo_1, exo_2, exo_3\}$.
- ILs correspondent à la transformée qualitative de Moebius de μ :

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_2 exo_3	$exo_1 exo_2$ exo_3
$\mu\#$	3	2	2	4	4	1	5

Les règles Si ... alors...

- Si on peut décrire les objets que l'on veut sélectionner par une intégrale Sugeno à l'aide de règle si ... alors , on peut construire une capacité et donc une intégrale de Sugeno correspondante.
- Ses règles font intervenir
 - les ensembles focaux de la capacité pour les règles de sélection
 - les ensembles focaux de la capacité conjuguée pour les règles d'élimination. La capacité conjuguée étant définie en renversant l'ordre de l'échelle à l'aide d'une négation.

exemple : $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ on peut définir la négation $n : L \rightarrow L$ par $n(1) = 5, n(2) = 4, n(3) = 3$ et $n(4) = 2$.

Il y a une correspondance entre se donner les règles et donner une capacité pour calculer l'intégrale de Sugeno

L'intégrale de Sugeno : un ensemble de règles si-alors

Règles de sélection associées à S_μ

Chaque ensemble focal E de μ correspond à la règle de sélection :

$$R_E^S: \text{Si } x_i \geq \mu_{\#}(E) \text{ pour tout } i \in E \text{ alors } S_\mu(x) \geq \mu_{\#}(E)$$

Pour tout ensemble focal E dont la capacité est $\mu(E) = \mu_{\#}(E)$:

Si les notes des exercices appartenant à E sont supérieures à $\mu(E)$ alors l'intégrale de Sugeno donnera une note globale supérieure à $\mu(E)$.

Exemple

	exo_1	exo_2	exo_3	exo_1, exo_2	exo_1, exo_3	exo_2, exo_3	exo_1, exo_2, exo_3
$\mu_{\#}$	3	2	1	1	1	4	5

- si $note_{exo_1} \geq 3$ alors $S_\mu(interro) \geq 3$
- si $note_{exo_3} \geq 2$ alors $S_\mu(interro) \geq 2$
- si $note_{exo_2} \geq 4$ et $note_{exo_3} \geq 4$ alors $S_\mu(interro) \geq 4$
- si $note_{exo_1} \geq 5$ et $note_{exo_2} \geq 5$ et $note_{exo_3} \geq 5$ alors $S_\mu(interro) \geq 5$.

L'intégrale de Sugeno : un ensemble de règles si-alors

Règles d'élimination associées à S_μ

Chaque ensemble focal T de la conjuguée μ^c correspond à la règle d'élimination :

$$R_T^e: \text{Si } x_i \leq n(\mu_{\#}^c(T)) \text{ pour tout } i \in T \text{ alors } S_\mu(x) \leq n(\mu_{\#}^c(T))$$

Capacité conjuguée

$\mu^c(A) = n(\mu(A^c))$ où A^c complémentaire de A , n négation.

Exemple

$L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(1) = 5$, $n(2) = 4$, $n(3) = 3$.

	exo_1	exo_2	exo_3	$exo_1 exo_2$	$exo_1 exo_3$	$exo_2 exo_3$	$exo_1 exo_2, exo_3$
μ	3	2	2	4	3	3	5
μ^c	3	3	2	4	4	3	5

L'intégrale de Sugeno un ensemble de règles si-alors

Pour tout ensemble focal T dont la capacité conjuguée est $\mu^c(E)$:
Si les notes des exercices appartenant à T sont inférieures à $n(\mu_{\#}^c(T))$ alors l'intégrale de Sugeno donnera un note globale inférieure à $n(\mu_{\#}^c(T))$.

Exemple

$L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(1) = 5$, $n(2) = 4$, $n(3) = 3$.

	exo_1	exo_2	exo_3	$exo_1 exo_2$	$exo_1 exo_3$	$exo_2 exo_3$	$exo_1 exo_2, exo_3$
μ^c	3	1	1	4	4	3	5

- si $note_{exo_1} \leq 3$ alors $S_{\mu}(interro) \leq 3$;
- si $note_{exo_1} \leq 2$ et $note_{exo_2} \leq 2$ alors $S_{\mu}(interro) \leq 2$;
- si $note_{exo_1} \leq 2$ et $note_{exo_3} \leq 2$ alors $S_{\mu}(interro) \leq 2$;
- si $note_{exo_2} \leq 2$ et $note_{exo_3} \leq 2$ alors $S_{\mu}(interro) \leq 2$;

Un exemple avec le programme de 6ème

- **Organisation et gestion de données, fonctions**
 - Proportionnalité
 - Organisation et représentation de données
- **Nombres et calcul**
 - Nombres entiers et décimaux
 - Opérations
 - Nombres en écritures fractionnaire
- **Géométrie**
 - Figures planes
 - Symétrie orthogonale par rapport à une droite

Une interrogation peut comporter plusieurs exercices à thèmes. On peut faire varier la capacité sur les ensembles d'exercices pour donner une importance plus grande à certains thèmes ou certains groupes de thèmes.

Exemples de capacités

- On considère un contrôle avec 4 exercices.
Si on veut que au moins les trois exercices exo_1 , exo_2 et exo_3 soient justes pour avoir la note globale 4, on pose $\mu(exo_1, exo_2, exo_3) = 4$.

On a alors pour le contrôle suivant

exo_1	exo_2	exo_3	exo_4
5	5	5	1

l'intégrale de Sugeno qui donne 4.

- Pour A un ensemble d'exercices, la capacité de A , $\mu(A)$ est la note globale obtenue par un contrôle dont les exercices de A ont obtenu la note maximale 5 et les autres exercices la note minimale 1.

Construction capacité à partir de règles Si-alors

On considère 4 exercices et les règles suivantes.

Exemple de règles de sélection

On considère 4 exercices et les règles suivantes :

- Si $exo_1 \geq 3$ et $exo_4 \geq 3$ alors la *noteducontrle* ≥ 3 ,
- Si $exo_2 \geq 4$ et $exo_3 \geq 4$ alors la *noteducontrle* ≥ 4 .

On a deux ensembles focaux :

$\{exo_1, exo_4\}$ de capacité 3, et $\{exo_2, exo_3\}$ de capacité 4.

Exemple de règles d'élimination

- Si $exo_1 \leq 2$ et $exo_3 \leq 2$ alors la *noteducontrle* ≤ 2 ,
- Si $exo_2 \leq 3$ alors la *noteducontrle* ≤ 3 .

On a deux ensembles focaux pour μ^c :

$\{exo_1, exo_3\}$ de capacité 4, $\{exo_2\}$ de capacité 3.

Exemples de capacité-remarque

Si on change la capacité on change la note globale.

On considère des exercices à thèmes.

Si on veut prendre en compte qu'un thème précis, par exemple la géométrie, on mettra la capacité des ensembles d'exercices sans géométrie à 1.

On empêche les notes des exercices sans géométrie d'avoir un rôle dans le calcul du maximum dans la formule de l'intégrale de Sugeno.

Interprétation de la note du contrôle

On connaît la note et la capacité qui a été utilisée pour la calculer.

les notes des exercices

exo_1	exo_2	exo_3	exo_4
2	3	5	3

Les ensembles focaux

	$\{exo_1, exo_2\}$	$\{exo_3, exo_4\}$	$\{exo_2, exo_3, exo_4\}$
$\mu_{\#}$	2	4	5

La capacité μ

exo_1	exo_2	exo_3	exo_4	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_1 exo_4	exo_2 exo_3	exo_2 exo_4	exo_3 exo_4	exo_1 exo_2 exo_3	exo_1 exo_2 exo_4	exo_1 exo_3 exo_4	exo_2 exo_3 exo_4	exo_1 exo_2 exo_3 exo_4
1	1	1	1	2	1	1	1	1	4	2	2	4	5	5

La capacité conjuguée μ^c

exo_1	exo_2	exo_3	exo_4	exo_1 exo_2	exo_1 exo_3	exo_1 exo_4	exo_2 exo_3	exo_2 exo_4	exo_3 exo_4	exo_1 exo_2 exo_3	exo_1 exo_2 exo_4	exo_1 exo_3 exo_4	exo_2 exo_3 exo_4	exo_1 exo_2 exo_3 exo_4
1	2	4	4	2	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5

Les ensembles focaux de la conjuguée

	exo_2	exo_3	exo_4	exo_1, exo_3	exo_1, exo_4	exo_2, exo_3	exo_2, exo_4
$\mu_{\#}^c$	2	4	4	5	5	5	5

Les ensembles focaux de μ

	$\{exo_1, exo_2\}$	$\{exo_3, exo_4\}$	$\{exo_2, exo_3, exo_4\}$
$\mu_{\#}$	2	4	5

Les ensembles focaux de la conjuguée

	exo_2	exo_3	exo_4	exo_1, exo_3	exo_1, exo_4	$exo_2 exo_3$	$exo_2 exo_4$
$\mu_{\#}^c$	2	4	4	5	5	5	5

- Les règles de sélection :
 - Si $exo_1 \geq 2$ et $exo_2 \geq 2$ alors $S_{\mu}(copie) \geq 2$,
 - Si $exo_3 \geq 4$ et $exo_4 \geq 4$ alors $S_{\mu}(copie) \geq 4$,
 - Si $exo_2 \geq 5$ et $exo_3 \geq 5$ et $exo_4 \geq 5$ alors $S_{\mu}(copie) \geq 5$.
- Les règles d'élimination :
 - Si $exo_2 \leq 4$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 4$,
 - Si $exo_3 \leq 2$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 2$,
 - Si $exo_4 \leq 2$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 2$,
 - Si $exo_1 \leq 1$ et $exo_3 \leq 1$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 1$,
 - Si $exo_1 \leq 1$ et $exo_4 \leq 1$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 1$,
 - Si $exo_2 \leq 1$ et $exo_3 \leq 1$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 1$,
 - Si $exo_2 \leq 1$ et $exo_4 \leq 1$ alors $S_{\mu}(copie) \leq 1$.

- Les règles de sélection :

Si $exo_1 \geq 2$ et $exo_2 \geq 2$ alors $S_\mu(\text{copie}) \geq 2$,

Si $exo_3 \geq 4$ et $exo_4 \geq 4$ alors $S_\mu(\text{copie}) \geq 4$,

Si $exo_2 \geq 5$ et $exo_3 \geq 5$ et $exo_4 \geq 5$ alors $S_\mu(\text{copie}) \geq 5$.

- Les règles d'élimination :

Si $exo_2 \leq 4$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 4$,

Si $exo_3 \leq 2$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 2$,

Si $exo_4 \leq 2$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 2$,

Si $exo_1 \leq 1$ et $exo_3 \leq 1$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 1$,

Si $exo_1 \leq 1$ et $exo_4 \leq 1$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 1$,

Si $exo_2 \leq 1$ et $exo_3 \leq 1$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 1$,

Si $exo_2 \leq 1$ et $exo_4 \leq 1$ alors $S_\mu(\text{copie}) \leq 1$.

$S_\mu(\text{copie}) = 3$ donc

Règles sélection :

non ($S_\mu(x) \geq 4$) donc $exo_3 \leq 3$ ou $exo_4 \leq 3$.

Règles élimination:

non ($S_\mu(x) \leq 2$) donc $exo_3 \geq 3$ et $exo_4 \geq 3$.