exercice 5.1

$(u_n) \subset \mathbb{C}$, $u_n \to l$.

$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Mq $v_n \to l$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0$ tq. $\forall n \geq n_0$. $|u_n - l| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$: $|v_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon$

$\leq \frac{n_0}{n} + \varepsilon$

$\Rightarrow |v_n - l| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand $\Rightarrow v_n \to l$.

la réciproque n'est pas vraie:
exemple: $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais $v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\right)$
vérifie $|v_n| \leq \frac{1}{n}$ et donc $v_n \to 0$.

Exercice 5.2

5.2.1 $(u_n) \subset \mathbb{C}$, t.q. $\lim_{n \to \infty} (u_{n+1} - u_n) = l \in \mathbb{C}$.

Mq $\frac{u_n}{n} \to l$

On a :
$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)}_{\to l \text{ [Cesaro]}} = \frac{1}{n} (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \underbrace{\frac{u_0}{n}}_{\to 0} \Rightarrow \frac{u_n}{n} \to l$$

5.2.2 Soit u_n tq. $\left(\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} u_k\right) \to l$ et $n(u_n - u_{n-1}) \to 0$.

$$n(u_n - u_{n-1}) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cesaro} \quad \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} k(u_k - u_{k-1}) \to 0$$

Mais $$\sum_{k=0}^{n-1} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (k-(k+1))u_k + nu_{n-1}$$

$$\Rightarrow o(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k(u_k - u_{k-1}) = \underbrace{-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k}_{\to \ell} + u_{n-1}$$

$$\Rightarrow u_{n-1} \to \ell \quad \Rightarrow u_n \to \ell$$

CORRECTIONS :

exercices 6.1 et 6.3

[G. Costantini. http://bacamath.n

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$a_0 = a$; $b_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Solution :

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$\forall n \in \mathbb{N},$
$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2}{4} - a_nb_n$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$$

Enfin, comme $a_0 > b_0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant b_n$

Bien que ce résultat ne soit pas une hypothèse nécessaire du théorème des suites adjacentes, on l'utilise pour prouver les suivants :

- En effet, d'une part : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} \leqslant a_n$

  Donc la suite (a_n) est décroissante.

- D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_nb_n} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\,) \geqslant 0$

  (par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$)

  Donc la suite (b_n) est croissante.

- On considère maintenant la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|a - b|$$

  * On a bien sûr $\wp(0)$.
  * Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

    Supposons $\wp(n)$: $|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|a - b|$

Utilisons la propriété : $0 \leqslant X \leqslant Y \Rightarrow 0 \leqslant (Y-X)^2 \leqslant Y^2 - X^2$

(Pour le démontrer, il suffit de multiplier l'inégalité $0 \leqslant Y - X \leqslant Y + X$ par $Y - X \geqslant 0$)

Comme $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$, on a :

$$|a_{n+1} - b_{n+1}|^2 \leqslant |a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2| \overset{(1)}{\leqslant} \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{|a-b|^2}{2^{2n+2}}$$

Et par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$: $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}} |a - b|$

D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n} |a - b|$$

D'où, par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

On a donc prouvé que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne connaît pas d'expression de cette limite mais elle est liée aux intégrales elliptiques de 2ème espèce...)

2.3. Suites récurrentes définies implicitement

Là encore, donnons un exemple :

Soit n un entier naturel impair.

a) Démontrer que l'équation $(E_n) : \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 0$

admet unique solution réelle α_n.

b) Démontrer que la suite (α_n) diverge.

Solution :

Posons : $$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

(Polynôme de Taylor de l'exponentielle)

On a alors : $$P_n'(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{iX^{i-1}}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} = P_{n-1}(X)$$

a) Considérons la propriété $\wp$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(k) : \forall x \in \mathbb{R},\ P_{2k}(x) > 0 \text{ et } \exists! \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } P_{2k+1}(\alpha_k) = 0 \text{ avec } \begin{cases} P_{2k+1}(x) < 0 \text{ si } x < \alpha_k \\ P_{2k+1}(x) > 0 \text{ si } x > \alpha_k \end{cases}$$

On a : $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0$$

Donc P_3 est strictement croissante (puisque $P_3' = P_2$). En outre $\lim\limits_{x \to -\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_3(x) = +\infty$.

Comme P_3 est continue, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc l'existence d'un unique réel α_1 tel que $P_3(\alpha_1) = 0$.

La croissance de P_3 entraîne, de plus : $P_3 < 0$ sur $]-\infty, \alpha_1[$ et $P_3 > 0$ sur $]\alpha_1, +\infty[$. D'où $\wp(1)$.

Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\wp(k) \Rightarrow \wp(k+1)$:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$.

Comme $P'_{2k+2} = P_{2k+1}$, on a :

x	$-\infty$	α_k	$+\infty$
Signe de P'_{2k+2}	$-$	0	$+$
Variations de P_{2k+2}	$\searrow$		$\nearrow$

Or : $$P_{2k+2}(\alpha_k) = P_{2k+1}(\alpha_k) + \frac{\alpha_k^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{\alpha_k^{2k+2}}{(2k+2)!} > 0$$

Donc : $$P_{2k+2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$P'_{2k+3} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$P_{2k+3} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2k+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k+3} = +\infty$ et P_{2k+3} continue donc :

$$\exists!\alpha_{k+1} \in \mathbb{R} \text{ tel que } P_{2k+3}(\alpha_{k+1}) = 0 \text{ avec } \begin{cases} P_{2k+3}(x) < 0 \text{ si } x < \alpha_{k+1} \\ P_{2k+3}(x) > 0 \text{ si } x > \alpha_{k+1} \end{cases}$$

D'où $\wp(k+1)$.

L'équation (E_n) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 0$ admet donc bien, pour n impair, une unique solution réelle α_n.

b) Soit $M \in \mathbb{R}$. On a : $$\lim_{k\to+\infty} P_{2k+1}(M) = e^M > 0$$

Donc : $$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geqslant k_0 \Rightarrow P_{2k+1}(M) > 0)$$

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow P_{2k+1}(M) > P_{2k+1}(\alpha_k)$$

Donc, par croissance de P_{2k+1} : $$k \geqslant k_0 \Rightarrow M > \alpha_k$$

Ce qui prouve bien que la suite (α_n) diverge vers $-\infty$.

Pour la convergence, on distingue quatre cas : où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n < 1$)

Correction exercice 6.2

s $+\infty$).

(u_n) converge vers 1 $\Leftrightarrow$ $u_0 \in [-1, 1]$

Conclusion :

Exemple 2 : suites de Héron

On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)u_n + \dfrac{a}{u_n^{p-1}}\right] \end{cases}$

Précisons, avant toute chose que clairement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est bien définie.

On introduit :
$$f_p :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$$
$$x \mapsto \frac{1}{p}\left[(p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right]$$

Recherche des éventuels points fixes de f_p :
$$f_p(x) = x \Leftrightarrow (p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} = px \Leftrightarrow x^p = a$$

Et comme $a > 0$:
$$f_p(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt[p]{a}$$

Étudions les variations de f_p :
$$f'_p(x) = \frac{p-1}{p} + a\frac{1-p}{p}\frac{1}{x^p} = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right)$$
$$f'_p(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{x^p} \geqslant 0 \Leftrightarrow x^p \geqslant a$$

Et comme $a > 0$, par croissance de $t \mapsto \sqrt[p]{t}$ sur $[0, +\infty[$:
$$f'_p(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[p]{a}$$

D'où le tableau de variations de f_p :

x	0		$\sqrt[p]{a}$		$+\infty$
Signe de f'_p		$-$	0	$+$	
Variations de f_p		$\searrow$	$\sqrt[p]{a}$	$\nearrow$	

f_p atteint son minimum en son point fixe.

Donc f_p est croissante sur $I = [\sqrt[p]{a}, +\infty[$.

On constate, de plus, que I est stable par f_p.

En effet, puisque f est croissante sur I et que $\sqrt[p]{a}$ est un point fixe de f on a :

$$x \in I \Rightarrow x \geqslant \sqrt[p]{a} \Rightarrow f(x) \geqslant f(\sqrt[p]{a}) \Rightarrow f(x) \geqslant \sqrt[p]{a} \Rightarrow f(x) \in I$$

Du théorème 1.2.1., on déduit déjà que (u_n) est monotone.

De plus :

$$f_p(x) - x = a - x^p$$

Donc, pour $x \in I$:

$$f_p(x) - x \leqslant 0$$

Du théorème 1.2.2., on déduit la décroissance de (u_n) dès lors que $u_0 \in I$.

Bilan : lorsque $u_0 \in [\sqrt[p]{a}, +\infty[$, (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt[p]{a}$, donc converge vers $\sqrt[p]{a}$.

Maintenant, si $u_0 \in]0, \sqrt[p]{a}[$ alors il suffit de constater que $u_1 \in [\sqrt[p]{a}, +\infty[$ et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers $\sqrt[p]{a}$.

En particulier ($p = a = 2$), la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$. (Cet algorithme était déjà connu des Babyloniens)

1.2.3. Théorème

Si $\begin{cases} f(I) \subset I \\ f \text{ décroissante sur } I \end{cases}$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

lus précisément :

$\leqslant f \circ f(u_0) \Rightarrow (u_{2n})$ croissante et (u_{2n+1}) décroissante

$\geqslant f \circ f(u_0) \Rightarrow (u_{2n})$ décroissante et (u_{2n+1}) croissante

émonstration :

mme $f(I) \subset I$, la composée $f \circ f$ est bien définie sur I.

près le théorème de sens de variation d'une composée, on a :

$$f \circ f \text{ croissante sur } I$$

applique alors le théorème 1.2.1. à $f \circ f$.

inguons deux cas :

$_0 \leqslant u_2$

Alors (récurrence facile), (u_{2p}) croissante.

Mais d'autre part, f étant décroissante, l'inégalité $u_0 \leqslant u_2$ entraîne :

$$f(u_0) \geqslant f(u_2)$$

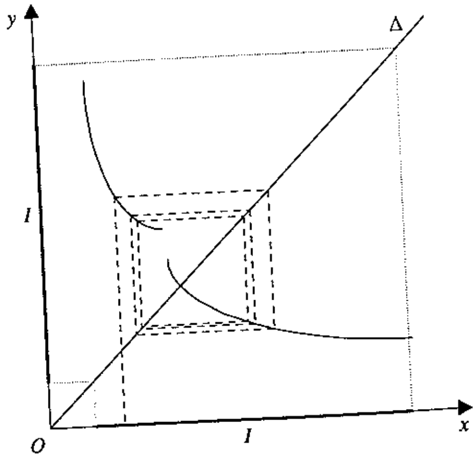
C'est-à-dire :

$$u_1 \geqslant u_3$$

D'où (récurrence facile), (u_{2p+1}) décroissante.

2) $u_0 \geqslant u_2$

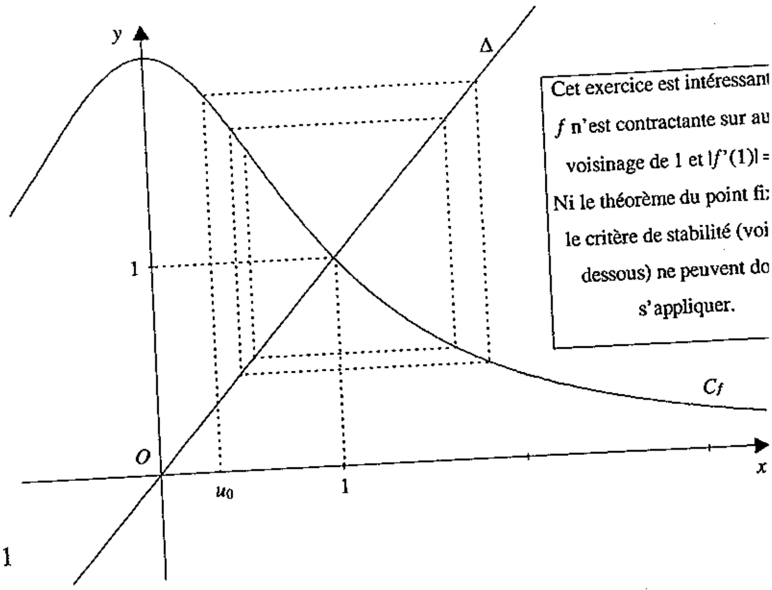
Analogue. On obtient (u_{2p}) décroissante et (u_{2p+1}) croissante.



Dans la pratique, le sens de variation des suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) est obtenu en étudiant le signe de $f \circ f(x) - x$.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$



Cet exercice est intéressant
f n'est contractante sur au
voisinage de 1 et $|f'(1)| =$
Ni le théorème du point fi
le critère de stabilité (voi
dessous) ne peuvent do
s'appliquer.

Evidemment, (u_n) est bornée par 0 et 2.

On introduit : $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2 = x + x^3 \Leftrightarrow x = 1$$

Par ailleurs, on montre sans peine que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ stable.

D'après le théorème 1.2.3., les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones de sens contraire.

Posons $g = f \circ f$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{2}{1+\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$$

Étudions le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4} - x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(1+x^2)^2 - [(1+x^2)^2+4]x \geqslant 0$$

$$g(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 + 4x^2 + 2x^4 - 5x - 2x^3 - x^5 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2+x+2)(x-1)^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$

On distingue alors deux cas :

$u_0 \in [0, 1]$:

Alors $g(u_0) - u_0 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_2 \leqslant u_0$. Toujours d'après le théorème 1.2.3., la suite (u_{2n}) est donc décroissante et (u_{2n+1}) est croissante. Comme ces suites sont bornées, elles convergent et leur limite est un poin fixe de g (qui ici est unique, à savoir 1, en adaptant les calculs ci-dessus).

Comme les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite, (u_n) converge (vers 1).

$u_0 \in [1, +\infty[$:

Alors $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$, c'est-à-dire, $u_2 \geqslant u_0$. Cette fois ci, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante. Même conclusion que ci-dessus.

Remarque : il arrive que $g = f \circ f$ admette plusieurs points fixes, auquel cas (u_{2n}) et (u_{2n+1}) peuvent très bien avoir des limites différentes.

1.3. Convergence de (u_n)

1.3. Théorème Point fixe

Soit I un intervalle fermé non vide.

Soit $f : I \to I$ une application contractante sur I.

Alors :

1) f admet un unique point fixe ℓ dans I.

2) $\forall u_0 \in I$, la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ.

On peut remplacer l'hypothèse "$f : I \to I$ contractante" par "$f : I \to \mathbb{R}$ contractante et telle que $f(I) \subset I$"

On rappelle que "f contractante sur I" signifie :

$$\exists k \in [0, 1[,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Démonstration :

Remarquons au préalable que, u_0 étant dans I et I étant stable par f, la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$$

Existence d'un point fixe :

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

- On a évidemment $\wp(0)$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \underset{f(I) \subset I}{\overset{f \text{ contractante}}{\leqslant}} k|u_{n+1} - u_n| \overset{\wp(n)}{\leqslant} k^{n+1}|u_1 - u_0|$$

  D'où $\wp(n+1)$.

u principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

éduisons-en que (u_n) **est de Cauchy** :

it $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

it $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geqslant 0$.

tons $r = q - p$.

a :

$$|u_q - u_p| = |u_{p+r} - u_p| = \left| \sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i \right| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i |u_1 - u_0|$$