1 Identificateurs

- Logiciel : un logiciel de géométrie dynamique.
- Compétences sur logiciel : notion de trace d'un point.
- Connaissances mathématiques : équation du second degré, nombres complexes, notion de lieu géométrique, d'image d'un ensemble par une application.
- Classe : TS.

2 Fiche élève

2.1 La situation

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z de forme algébrique $x+\mathrm{i}\,y$ associe le complexe Z de forme algébrique $X+\mathrm{i}\,Y$ définie par

$$X+\mathrm{i}\,Y=\left(x+y\right)+\mathrm{i}\,xy$$

On cherche à connaître l'image de $\mathbb{C}$ par f. En d'autres termes, on cherche à savoir quel est le lieu géométrique du point M' d'affixe $Z=f(z)$ lorsque le point M d'affixe z parcourt le plan tout entier.

2.2 Travail en géométrie dynamique

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer une réponse.

2.3 Démontrer.

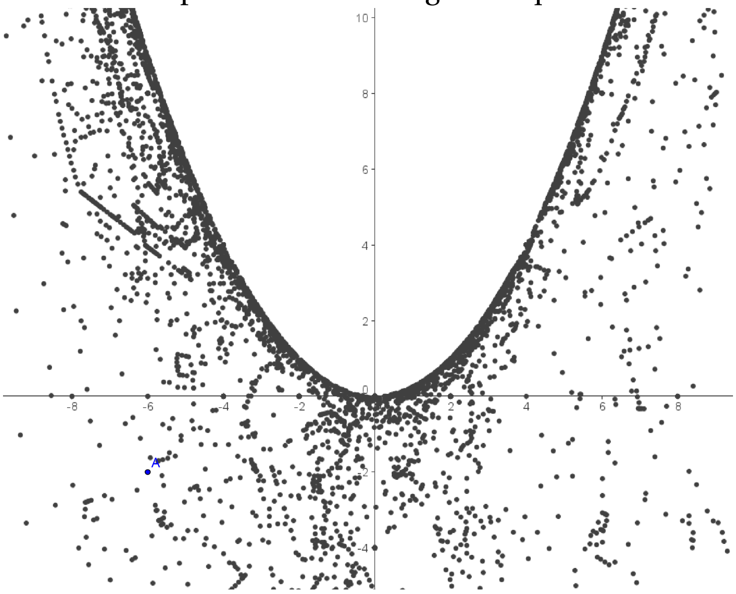
Éléments de réponse.

3 Avec geogebra

On définit un point A libre dans le plan. On définit ensuite le point image B par :

```
B=(x(A) + y(A), x(A) y(A))
```

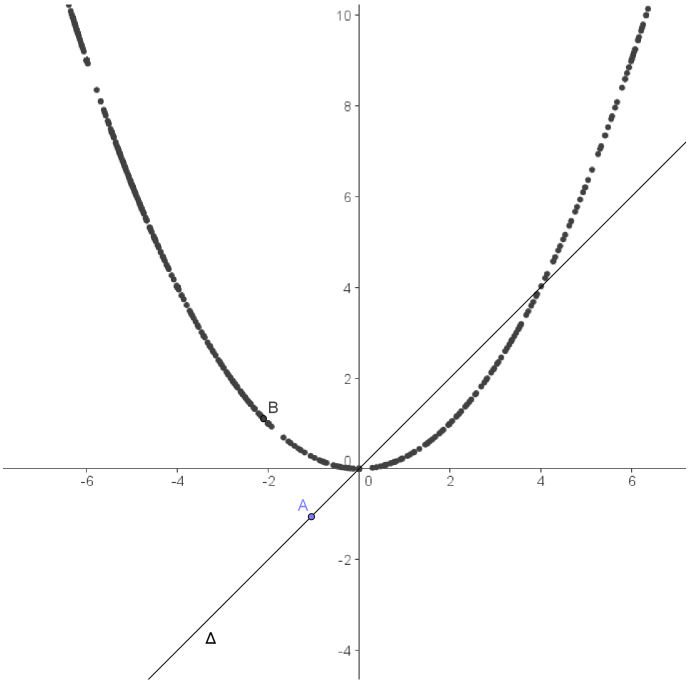
On active alors la trace de B et on balade le point antécédent A dans le plan.
On obtient rapidement une image telle que la suivante :



Il semble donc que le lieu décrit par M' soit la partie de plan définie par

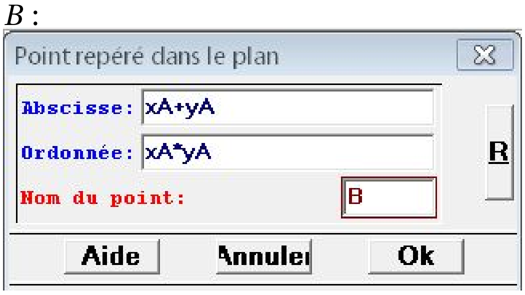
$$\boxed{Y \leqslant \frac{1}{4} X^2}$$

On pourra éventuellement indiquer la construction suivante pour une aide à la compréhension :
on définit la droite Δ d'équation $y = x$, on définit un point libre A sur cette droite Δ. On définit alors le point B comme ci-dessus et on active sa trace.
En baladant A sur Δ, on obtient :



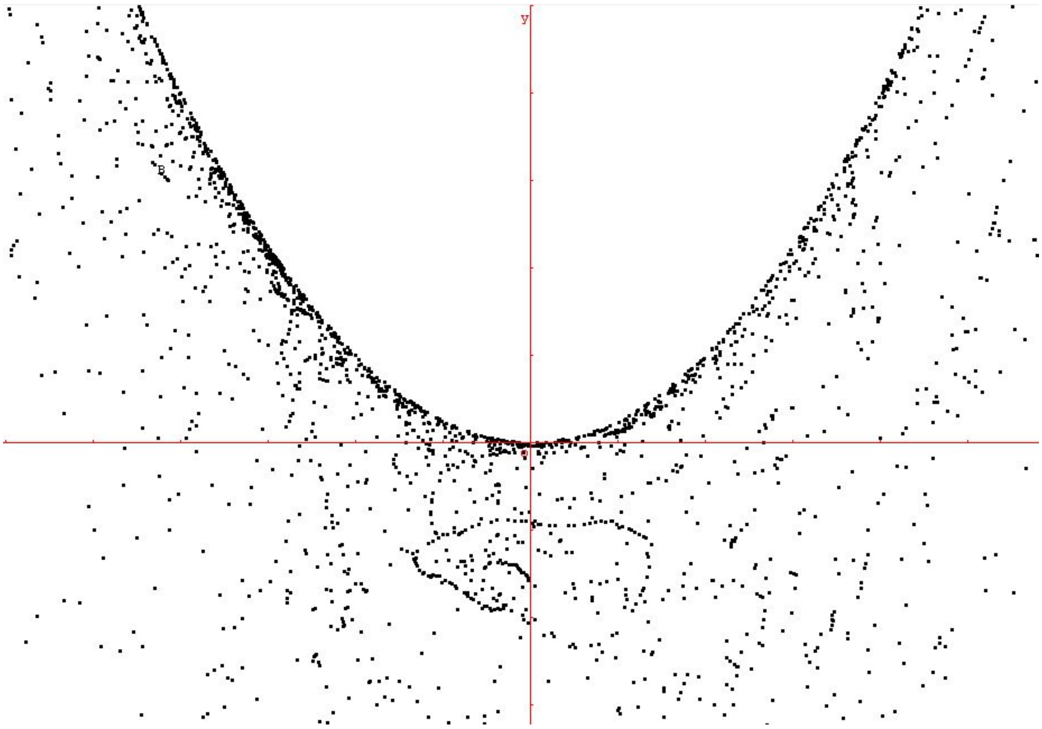
4 Avec geoplan

On crée un point A libre dans le plan. On crée ensuite son abscisse et son ordonnée (créer/numérique/-calcul géométrique/abscisse d'un point dans le plan) que l'on nomme xA et yA. On crée ensuite le point B :



On sélectionne le mode trace pour le point B

et on obtient rapidement une image telle que la suivante :



5 Avec Xcas

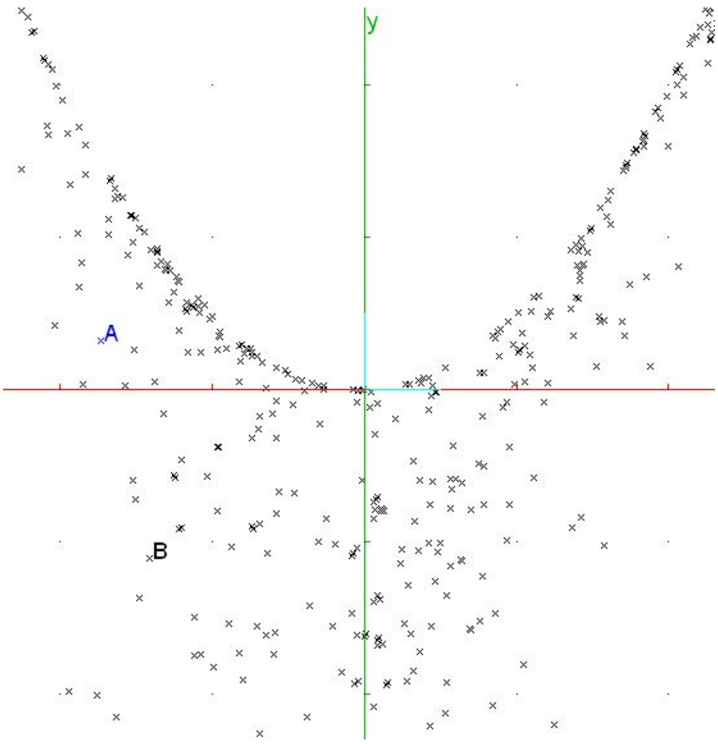
On ouvre un module de géométrie (alt G ou edit/ajouter/geo2d). En ligne 1, on crée le point A par

```
A:=point(0,0)
```

En lignes 2 et 3, on entre :

```
B:=point(abscisse(A)+ordonnee(A),abscisse(A)*ordonnee(A))
trace(B)
```

On passe ensuite en mode pointeur et on balade le point A :



Un premier calcul avec Xcas :

```
2 solve([X=x+y,Y=x*y],[x,y])
```

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(-X+\sqrt{X^2+(-4)\cdot Y}\right) & \frac{X+\sqrt{X^2+(-4)\cdot Y}}{2} \\ \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(-X-\sqrt{X^2+(-4)\cdot Y}\right) & \frac{X-\sqrt{X^2+(-4)\cdot Y}}{2} \end{bmatrix}$$

6 Éléments de justification

A f, on associe la fonction F qui à tout point $M(x;y)$ du plan associe le point $M'(x+y;xy)$.

1. Si $(X;Y)$ est un couple de réels tel que $Y \leqslant \frac{1}{4}X^2$, on a $X^2-4Y \geqslant 0$ et le trinôme $t \longmapsto t^2 - Xt + Y$ a alors deux racines réelles (éventuellement confondues) x et y avec $(X;Y) = \big(x+y;xy\big)$.
   On constate ainsi que tout point N qui se trouve en-dessous de la parabole représentant la fonction $\theta \longmapsto \frac{1}{4}\theta^2$ est effectivement un point image par F.
2. Si le couple de réels $(X;Y)$ peut s'écrire sous la forme $(x+y;xy)$, on vérifie aisément que l'on a $x^2 - Xx + Y = 0$ et $y^2 - Xy + Y = 0$, ce qui prouve que le trinôme $t \longmapsto t^2 - Xt + Y$ a au moins une racine réelle et que l'on a donc $X^2 - 4Y \geqslant 0$ ou encore $Y \leqslant \frac{1}{4}X^2$.

   On montre ainsi qu'un point N de couple de coordonnées $(X;Y)$ tel que $Y > \frac{1}{4}X^2$ n'est l'image par F d'aucun point $M(x;y)$.