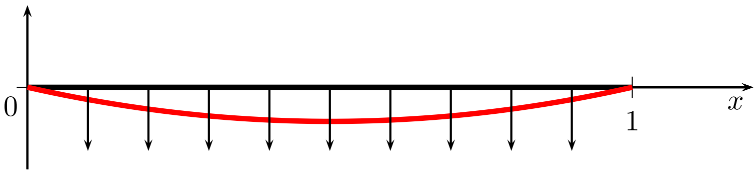
Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Préparation à l'écrit - Samedi 22 juin 2013

Durée : 4 heures - Le sujet comporte 4 pages.

- Le problème traite de la modélisation de la flexion d'une poutre encastrée à ses deux extrémités.
- La partie A propose l'étude de cas simples, les parties B et C décrivent une méthode numérique utilisée pour traiter ce problème et les parties D et E étudient certaines propriétés de la matrice associée à cette méthode numérique.
- Les cinq parties sont « essentiellement indépendantes ».

Pour étudier la flexion d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, on modélise le problème de la manière suivante : la poutre est assimilée au segment $[0,1]$ de l'axe des abscisses et subit une force $\overrightarrow{f}$ dans la direction verticale dont l'intensité (et le sens) peut être variable selon l'emplacement. La fonction f est donc une fonction à valeurs réelles, définie sur $[0,1]$.
La position du point de la poutre d'abscisse x est noté $u(x)$.



La fonction f est supposée continue sur $[0,1]$. Sous des hypothèses très simplificatrices, la fonction u est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et vérifie l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} u''(x) = -f(x) & \text{pour } x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Partie A. Quelques résolutions exactes.

1. On suppose pour cette question que la force f est uniformément répartie, c'est-à-dire que la fonction f est constante. On notera a cette constante.
   (a) Résoudre l'équation (1).
   (b) Tracer l'allure de la poutre en fonction du signe de a.
2. On suppose pour cette question que la fonction f est affine.
   (a) Résoudre l'équation (1).
   (b) Préciser les éventuels points d'inflexion de la solution u.
3. On suppose pour cette question que la fonction f est définie par $f(x) = \cos(\pi x)$.
   (a) Résoudre l'équation (1).
   (b) Étudier les variations de la solution u. On ne demande pas la valeur des extrema.

Partie B. Méthode de différences finies.

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$. On peut procéder par une *méthode de différences finies* en discrétisant l'équation (1) pour approcher la solution u aux $n+2$ points $x_k = \frac{k}{n+1}$ pour $k = 0, \ldots, n+1$.

1. (a) On suppose ici que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. Démontrer que, pour tous $x \in [0,1]$ et $h \in \mathbf{R}$ tels que $x+h \in [0,1]$:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

(b) En déduire que, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et si la fonction u est solution de (1) alors, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}) = -\frac{f(x_k)}{(n+1)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right) \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

On note $f_k = f(x_k)$ la valeur de la fonction f au point x_k. La méthode utilisée consiste à déterminer un vecteur $\tilde{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{n+1})$ de $\mathbf{R}^{n+2}$ tel que

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = -\dfrac{f_k}{(n+1)^2} \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n. \\ y_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

2. Vérifier alors que le système (2) est équivalent à l'équation

$$By = c \tag{3}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $c = \left(\frac{f_1}{(n+1)^2}, \ldots, \frac{f_n}{(n+1)^2}\right)$ sont des éléments de $\mathbf{R}^n$ et B appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On fixe ici $n = 3$.
   (a) Justifier que l'équation matricielle (3) admet une unique solution.
   (b) Résoudre le système (3) (c'est-à-dire exprimer y_1, y_2, y_3 en fonction de c_1, c_2, c_3).

Partie C. Résolution du problème discrétisé.

Dans toute la suite du sujet, on considère un entier naturel $n \geqslant 3$ et on note B la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On définit les matrices L et U de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\frac{i-1}{i} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad U_{i,j} = \begin{cases} \frac{i+1}{i} & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier l'égalité $B = LU$.
2. Le système $By = c$ est alors équivalent au système

$$\begin{cases} Lz = c \\ Uy = z \end{cases} \tag{4}$$

   où $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ appartiennent à $\mathbf{R}^n$.
   Écrire un algorithme qui calcule, à partir des données $(c_1, \ldots, c_n)$, les coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ puis les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$.
3. Calculer le déterminant de la matrice B.

Partie D. Coefficients de la matrice B^{-1}.

On dira qu'une matrice A à coefficients réels est *positive*, et on notera $A \geqslant 0$, si tous ses coefficients sont positifs ou nuls.
Cette définition est également valable pour un vecteur. L'ensemble des vecteurs positifs de $\mathbf{R}^n$ est donc $\mathbf{R}^n_+$.
On dira qu'une matrice A à coefficients réels est *monotone* si elle est inversible et si A^{-1} est positive.
Le but de cette partie est de démontrer que la matrice B définie ci-dessus est monotone.

1. On souhaite montrer la caractérisation suivante : une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est monotone si et seulement si
$$\{x \in \mathbf{R}^n \ : \ Ax \geqslant 0\} \subseteq \mathbf{R}^n_+. \tag{5}$$
   (a) Justifier que la condition (5) est nécessaire.
   (b) On suppose l'inclusion (5) vraie.
      i. Montrer que A est inversible. (On pourra déterminer le noyau de A.)
      ii. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et v_j le j-ème vecteur colonne de la matrice A^{-1}. Justifier l'égalité $Av_j = e_j$ et conclure.
2. On démontre maintenant que la matrice B est monotone.
On note Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on considère un réel $\alpha > 0$ ainsi qu'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ vérifiant
$$(B + \alpha Id)x \geqslant 0.$$
   (a) On note p un entier compris entre 1 et n tel que $x_p = \min\limits_{i=1,\ldots,n} x_i$.
   Justifier que $x_p \geqslant 0$. (On pourra distinguer les cas $p = 1$, $p = n$ et $2 \leqslant p \leqslant n-1$.)
   (b) En déduire que la matrice $B + \alpha Id$ est monotone pour tout réel $\alpha > 0$.
   (c) Justifier que la matrice B est monotone.

Partie E. Détermination des valeurs propres de la matrice B.

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
Si une suite $(x_k)_k$ *de nombres réels vérifie la relation de récurrence*
$$ax_{k+1} + bx_k + cx_{k-1} = 0 \tag{6}$$
avec a,b,c réels, a non nul, on appelle équation caractéristique *l'équation*
$$a\rho^2 + b\rho + c = 0 \tag{7}$$
et :

– *si l'équation caractéristique* (7) *admet deux solutions réelles distinctes* ρ_1 *et* ρ_2*, alors il existe deux nombres réels* α *et* β *tels que*
$$\forall k \ : \ x_k = \alpha\rho_1^k + \beta\rho_2^k,$$
– *si l'équation caractéristique* (7) *admet une unique solution réelle* ρ*, alors il existe deux nombres réels* α *et* β *tels que*
$$\forall k \ : \ x_k = \alpha\rho^k + \beta k\rho^k,$$
– *si l'équation caractéristique* (7) *admet deux solutions complexes conjuguées* $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ *et* $\rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ *(avec* ρ *réel strictement positif et* θ *réel), alors il existe deux nombres réels* α *et* β *tels que*
$$\forall k \ : \ x_k = \rho^k\left(\alpha\cos(k\theta) + \beta\sin(k\theta)\right).$$

1. Justifier que toutes les valeurs propres de la matrice B sont réelles et que B est diagonalisable. (On ne demande ni les valeurs propres ni une base de vecteurs propres.)
2. Justifier que le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ si et seulement si la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{k+1} + (\lambda - 2)x_k + x_{k-1} = 0 \quad \text{pour tout } k = 1, \ldots, n & (\star) \\ x_0 = x_{n+1} = 0 & \\ x \neq 0 & \end{array}\right. \tag{8}$$

Dans la suite, λ désigne une valeur propre réelle de B et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ désigne un vecteur propre réel associé à λ.

3. On suppose pour cette question que $\lambda \notin [0, 4]$.
   (a) Justifier que l'équation caractéristique associée à la relation $(\star)$ admet deux racines réelles distinctes dont le produit est égal à 1.
   On note ρ la racine dont la valeur absolue est maximale.
   (b) Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que :
   $$\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n+1\ :\ x_k = \alpha\rho^k + \beta\rho^{-k}.$$
   (c) Déterminer les valeurs des réels α et β et en déduire une contradiction.
4. On suppose pour cette question que $\lambda \in \{0, 4\}$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel ρ et deux réels α et β tels que :
   $$\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n+1\ :\ x_k = \alpha\rho^k + \beta k\rho^k.$$
   (b) Déterminer les valeurs des réels α et β et en déduire une contradiction.
5. Les valeurs propres de B appartiennent donc à l'intervalle $]0, 4[$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel θ appartenant à $]0, \pi[$ et deux réels α et β tels que :
   $$\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n+1\ :\ x_k = \alpha\cos(k\theta) + \beta\sin(k\theta).$$
   (b) Justifier que $\alpha = 0$ puis qu'il existe un entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ et $\theta = \frac{m\pi}{n+1}$.
   (c) Démontrer l'égalité
   $$\lambda = 2 - 2\cos\theta$$
   puis démontrer que l'ensemble des valeurs propres de B est
   $$\left\{4\sin^2\frac{m\pi}{2(n+1)}\ :\ m \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant m \leqslant n\right\}.$$
6. Justifier que les réels
$$\sum_{m=1}^{n} \sin^2\frac{m\pi}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad \prod_{m=1}^{n} \sin^2\frac{m\pi}{2(n+1)}.$$
sont des rationnels et préciser leur valeur.