Moyennes

mai 2013

Une vitesse moyenne est-elle une moyenne de vitesses ?

1 Le principe de la valeur constante

Déterminer une moyenne consiste à déterminer une valeur constante ayant le même « effet » global que les valeurs fluctuantes réellement observées.
Éclaircissement par le biais de quelques exemples classiques ci-dessous.

Exercice 1 – Si je gagne 2000 euros par mois pendant 10 mois puis 2500 euros par mois pendant 15 mois, combien ai-je gagné en moyenne par mois sur cette période ?

Résolution.
Il faut comprendre : si tous les mois (pendant les 25 mois), j'avais gagné la même somme constante s, quelle serait cette constante s pour que mon gain total sur les 25 mois soit le même : $s+s+\cdots+s = (2000+2000+\cdots+2000)+(2500+\cdots+2500)$, ou encore $25s = 10\times 2000+15\times 2500$. MOYENNE ARITHMÉTIQUE □

Exercice 2 – Si mon salaire augmente de 1% chaque année pendant 10 ans puis de 2% chaque année pendant 15 ans, quel est le pourcentage moyen d'augmentation de mon salaire par an sur cette période ?

Résolution.
Il faut comprendre : si tous les mois de cette période, mon salaire avait connu la même augmentation en pourcentage t chaque an, quelle serait la valeur de t pour que l'augmentation totale sur les 25 ans soit la même ?
$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{25} = 1{,}01^{10}\times 1{,}02^{15}$.
MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

Exercice 3 –

1. Si je parcours une distance d à une vitesse v_1 (entre les instants t_1 et t_2) puis, au retour, la même distance d à une vitesse v_2 (entre les instants t_2 et t_3), quelle est ma vitesse moyenne sur l'aller-retour ?
2. Si je roule à une vitesse v_1 pendant $t/2$ h puis à une vitesse v_2 pendant un temps $t/2$ h, quelle est ma vitesse moyenne sur la durée totale ?

Résolution.

1. Il faut comprendre : si j'avais parcouru l'aller et le retour à la même vitesse v, quelle devrait être la valeur de v pour couvrir cet aller-retour entre les mêmes instants t_1 et t_3 ?
$v = \dfrac{2d}{t_3-t_1} = \dfrac{v_1(t_2-t_1)+v_2(t_3-t_2)}{t_3-t_1}$.
$v = \dfrac{2d}{t_3-t_1} = \dfrac{2d}{t_3-t_2+t_2-t_1} = \dfrac{2d}{\frac{d}{v_2}+\frac{d}{v_1}} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_1}}$. MOYENNE HARMONIQUE
2. Il faut comprendre : si j'avais roulé à la même vitesse v durant la durée t, quelle est la valeur de v me permettant de couvrir la même distance totale d ?

$$\begin{aligned}
v = &= \frac{d}{t} \\
&= \frac{d_1}{t/2} + \frac{d_2}{t/2} \\
&= \frac{v_1 t}{t/2} + \frac{v_2 t}{t/2} \\
&= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)
\end{aligned}$$

2 Vitesse moyenne et moyenne d'une fonction continue

Exercice 4 – Un véhicule roule entre les instants $a = 0$ et $b = 1$ (en heure). Sa vitesse (numérique) instantanée est donnée par $v(t) = 3t^2 + 30$, en km.h^{-1}.
On cherche à savoir quelle est sa vitesse moyenne sur le parcours.

1. Pour avoir une idée de cette moyenne, on prélève n valeurs de la vitesse instantanée espacées régulièrement.
   On en déduit une vitesse moyenne dépendant de n :
   $$v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} v\left(\frac{j}{n}\right)$$
   Pourquoi considère-t-on ici une moyenne arithmétique des vitesses plutôt qu'un autre type de moyenne ?
2. Écrire un algorithme prenant un entier naturel n et donnant en sortie la valeur v_n correspondante.
   Qu'obtient-on pour de grandes valeurs de n ?
3. Calculer $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b v(t)\, \mathrm{d}t$. La valeur obtenue confirme les résultats expérimentaux de l'algorithme. Est-ce un hasard ?

Résolution.

1. On a pris une moyenne arithmétique car on a découpé en intervalles de temps égaux (et non en distances parcourues égales, cf exercice précédent).
2. Intuitivement, plus n sera grand, meilleure sera la valeur de vitesse moyenne obtenue.
   Avec un peu de programmation (exple en python) :

```
# -*- coding: utf-8 -*-

from __future__ import division

def v(t):
    return 3*t**2+30

def vm(n):
    return 1/n*sum([v(j/n) for j in range(n+1)])


print vm(500000)
```

   On obtient une valeur proche de 31.
3. Mathématiquement, on obtiendra la vitesse moyenne avec un n "infini", soit
   $$v_{moy} = \lim_{n \to +\infty} v_n$$
   Soit, dans un cadre plus générique d'un intervalle de temps $[a; b]$ avec un prélèvement de n valeurs distinctes de la vitesse instantanée :

$$v_{moy} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} v\left(a + j \times \frac{b-a}{n}\right)$$

□

Si l'on se réfère maintenant au cours de calcul intégral, on a :

$$\begin{aligned}
v_{moy} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} v\left(a + j \times \frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{1}{b-a} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n} v\left(a + j \times \frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{1}{b-a} \times \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n} v(a) + \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} v\left(a + j \times \frac{b-a}{n}\right)\right) && \text{limite des aires de rectangles} \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale dans ce cas particulier nous redonne la valeur 31.

Définition.
La valeur moyenne sur $[a\,;\,b]$ d'une fonction f continue sur $[a\,;\,b]$ est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 – Où est le principe de la constante dans cette définition ?

Résolution.
Si on remplace f par la fonction constante μ, on a $\displaystyle\int_a^b \mu = \int_a^b f$ (moyenne vis-à-vis de l'aire sous la courbe ?)
On peut aussi revenir au détail de l'exercice précédent et constater que v_{moy} correspond bien aussi à la vitesse constante sur le parcours qui donnerait un temps de parcours égal à celui réalisé. □

Exercice 6 – Reprendre l'exercice 3 avec la nouvelle vision de moyenne précédente (en admettant que le point de discontinuité ne pose pas de problème).

Résolution.

1. Cas d'une vitesse v_1 et d'une vitesse v_2 sur une même distance.
   La vitesse moyenne est $v = \dfrac{1}{t_3 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_3} v(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{t_3-t_1}\left(\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_3} v(t)\,\mathrm{d}t\right)$, soit $v = \dfrac{1}{t_3-t_1}\left(\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v_1\,\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_3} v_2\,\mathrm{d}t\right)$ ou
   $v = \dfrac{1}{t_3-t_1}\left(v_1 \times (t_2 - t_1) + v_2 \times (t_3 - t_2)\right)$. On retrouve la formule précédente menant à la moyenne harmonique.
2. Cas d'une vitesse v_1 et d'une vitesse v_2 sur une même durée.

$$\begin{aligned}
v = &= \frac{1}{t}\int_0^t v(x)\,dx \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^{t/2} v_1\,dx + \int_{t/2}^{t} v_2\,dx\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(v_1 \times \frac{t}{2} + v_2 \times \frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right)
\end{aligned}$$