Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Introduction

aux équations différentielles

et aux dérivées partielles

Table des matières

Première partie

Equations différentielles

Chapitre 1

Méthodes de résolution explicite des équations différentielles "simples"

1.1 Définitions

Donnons tout d'abord quelques définitions essentielles pour commencer sur de bonnes bases.

Définition 1 ***Equation différentielle ordinaire.*** *Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$ au point t définie par*

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0 \text{ (on notera par abus } F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0) \qquad (1.1)$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(N.B. : on pourra utiliser x de temps en temps au lieu de t, i.e. $y(t)$ ou $y(x)$)

Définition 2 ***Equation différentielle normale.*** *On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1.2)$$

Donnons un exemple pour mettre les idées au clair.

Exemple 1 *Equation du premier ordre sous la forme normale*

$$y' = f(t, y) \ \ (\text{ou } \ \frac{dy}{dt} = f(t, y)) \qquad (1.3)$$

Donnons maintenant une classification par linéarité. Une EDO du type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle a la forme suivante :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \qquad (1.4)$$

noter que
(1) tous les $y^{(i)}$ sont de degré 1, et
(2) tous les coefficients dépendent au plus de x

Exemple 2 *Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires, et donner leur ordre (on justifiera les réponses).*

$$i.\ (y-x)dx + 4xdy = 0 \qquad ii.\ y'' - 2y' + y = 0 \qquad iii.\ \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

$$iv.\ (1-y)y' + 2y = e^x \qquad v.\ \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \qquad vi.\ \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

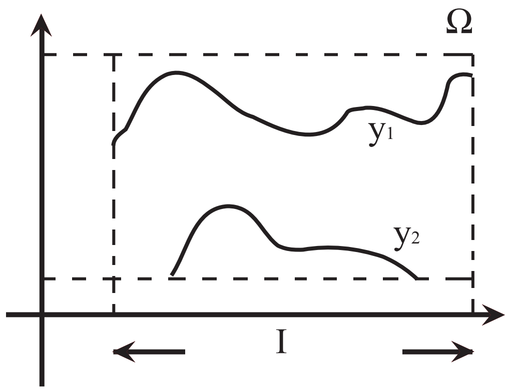
Définition 3 ***Solution.*** *On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On notera en général cette solution (y, I).*
Si I contient sa borne inférieure α, (resp. sa borne inférieure β), ce sont des dérivées à droite (resp. à gauche) qui interviennent au point $t = \alpha$ (resp. $t = \beta$). Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 4 *Soient (y, I) et $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ est un prolongement de (y, I) si et seulement si $I \subset \widetilde{I}$ et $\widetilde{y}\ |_I = y$.*

Définition 5 ***Solution maximale, solution globale.*** *Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$. On dit qu'une solution (y, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si y n'admet pas de prolongement $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \widetilde{I} \subset I_2$. On dit qu'une solution (y, I_1) est globale dans I_2 si et seulement si y admet un prolongement $\widetilde{y}$ solution définie sur l'intervalle I_2 tout entier.*

Remarque 1 *Toute solution globale sur un intervalle I est maximale sur I, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 3 *(voir figure)*



1.2 Réduction à une équation du premier ordre

Considérons l'EDO d'ordre n, $(n \geq 2)$,

$$F(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

où, y est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (on prend $m = 1$ en général) et $F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \ fois} \to \mathbb{R}^p$.

On fait le changement d'inconnues $z = (y, y', ..., y^{(n-1)})$. On a alors $z \in (\mathbb{R}^m)^n$. On note alors $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, où chacun des $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., n$. On se retrouve alors avec des relations entre les z_i :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} z_i' - z_{i+1} & = & 0, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ F(t, y, y', ..., y^{(n)}) & = & 0. \end{array} \right.$$

On se ramène alors à une équation du premier ordre, à une variable et n inconnues du type

$$G(t, z_1, z_2, ..., z_n, z_1', z_2', ..., z'n) = 0.$$

Cas particulier :$n = 2$ (F scalaire)

$$F(t, y, y', y'') = 0.$$

Cette équation peut se ramener à une équation du premier ordre à deux inconnues, z_1 et z_2 :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} z_1' - z_2 & = & 0, \\ F(t, z_1, z_2, z_1', z_2') & = & 0. \end{array} \right.$$

Exemple 4 *Considérons l'équation*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

En considérant $z_1 = y$ et $z_2 = z$, on peut écrire cette équation du second ordre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & z \\ b(t)y' + a(t)z' & = & -c(t)y + d(t), \end{array} \right.$$

soit encore

$$A(t) \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = B(t) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + C(t),$$

en posant $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ d(t) \end{pmatrix}$.

1.3 Intégration d'équations différentielles d'un certain type - quelques techniques

1.3.1 Equations à variables séparées (ou séparables)

Ce sont des équations du premier ordre sous forme normale données par l'équation (1.3), autrement dit $y' = f(t, y)$. Le but est d'exprimer $f(t, y)$ sous la forme $g(t)h(y)$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type

$$y' = g(t)h(y).$$

Les équations les plus simples sont de la forme

$$y' = f(t) \tag{1.5}$$

c'est à dire $h \equiv 1$ et $g(t) = f(t)$.
On suppose que f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Les solutions de (1.5) sont données alors par $y(t) = \displaystyle\int f(t)dt + C$ pour tout $t \in I$, C est une constante.

Définition 6 ***Equation à variables séparées*** *On appelle, de façon générale, équation à variables séparées toute équation de la forme*

$$b(y)y' = a(t) \tag{1.6}$$

où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur J et K où J et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 *Supposons a et b continues respectivement sur J et K. Soit I un intervalle de J, alors y est solution de (1.6) sur I si et seulement si*
1. y est différentiable sur I
2. Il existe $C \in \mathbb{R}$, constante telle que $B(y(t)) = A(t) + C$, pour tout $t \in I$ avec

$$A(t) = \int a(t)dt,\ (t \in J) \text{ et } B(t) = \int b(t)dt,\ (x \in K).$$

Preuve : En TD.

Remarque : Dans le cas général, si toute courbe définie par $B(y) = A(t) + C$, peut être paramétrée de telle façon que les fonctions $s \mapsto (t(s), y(s))$ satisfont l'équation

$$b(y(s))\frac{d}{ds}y(s) = a(t(s))\frac{d}{ds}t(s).$$

On dit que c'est une "courbe intégrale" de l'équation (1.6).
Le graphe de toute solution est une courbe intégrale, mais la réciproque n'est pas vraie.
Rappel : lorsqu'on considère une équation différentielle du type

$$y' = f(t, y),$$

avec $f \in \mathscr{C}^1(I \times A, \mathbb{R})$. Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times A$, il existe un intervalle $J \subset I$ avec $x_0 \in J$ et une application de classe $\mathscr{C}^1$ unique $\varphi : J \to A$, solution de l'équation telle que $\varphi(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution

$$y = \varphi(x)$$

se nomme courbe intégrale de l'équation différentielle proposée.

Théorème 2 *Si I est un intervalle ouvert de J. Toute fonction continue y sur I qui satisfait $B(y(t)) = A(t) + C$ pour tout $t \in I$, pour une certaine valeur de C et qui satisfait la condition $b(y(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$ est une solution de (1.6) sur I.*

Exemple 5 *Donner la (ou les) solution(s) maximale(s) de l'équation différentielle suivante*

$$y'(t)y(t) = -t$$

Définition 7 *Soit $\phi(t, y, y') = 0$ une équation différentielle. On dit que c'est une équation à variables séparables (pas encore séparées...), s'il existe un pavé $K_1 \times K_2$ tel que cette équation puisse s'écrire sous la forme $b(y)y' = a(t)$, $t \in K_1$, et $y \in K_2$.*

Exemple 6 *Dire si l'équation différentielle est à variables séparables ou non :*

$$2tyy' = (t-1)(y^2 - 1)$$

1.3.2 Equations homogènes

Définition 8 ***Equation différentielle scalaire homogène*** *Une équation différentielle scalaire homogène du premier ordre est une équation de la forme*

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.7}$$

où F est continue, homogène de degré quelconque r ($r \in \mathbb{Z}$) par rapport à t et y, c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on a

$$F(kt, ky, y') = k^r F(t, y, y')$$

Exemple 7 *Montrer que l'équation suivante est homogène, donner son degré :*

$$2t^2y' - y^2 = 4ty$$

Proposition 1 *Une équation scalaire normale du premier ordre homogène s'écrit pour tout $t \neq 0$ sous la forme*

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{1.8}$$

où f est définie, continue sur $I \subset \mathbb{R}$.

Preuve : En TD.

Pour intégrer l'équation (1.8), on fait le changement d'inconnue suivant : $y = ut$, soit encore $u = \frac{y}{t}$, $t \neq 0$, et $y'(t) = u(t) + tu'(t)$. L'équation (1.8) devient alors

$$tu' = f(u) - u. \tag{1.9}$$

C'est une équation à variables séparables (sous certaines conditions) :

CAS 1 :
Soient K_1, K_2, deux intervalles (K_1 pour t et K_2 pour u) tels que $0 \notin K_1$, et $f(u) - u \neq 0$ sur K_2, alors sur $K_1 \times K_2$, l'équation (1.9) est à variables séparables et s'écrit sous la forme

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{t}.$$

C'est à dire $\frac{1}{f(u) - u} u' = \frac{1}{t}$, donc $b(u) = \frac{1}{f(u) - u}$ et $a(t) = \frac{1}{t}$.
On pose $A(t) = \int a(t)dt$ et $B(x) = \int b(x)dx$. Ici, $A(t) = ln|t|$.
Et les courbes intégrales de l'équation (1.9) sont données par l'équation

$$B(u) = ln|t| + c.$$

Pour tout $u \in K_2$, $b(u) \neq 0$, donc toutes les courbes intégrales définies par (1.9) sont des solutions de (1.9), on a :

$$t = e^c e^{B(u(t))}, \text{ si } t > 0 \text{ dans } K_1,$$

ou

$$t = -e^c e^{B(u(t))}, \text{ si } t < 0 \text{ dans } K_1,$$

Ce qui implique $y(t) = tu(t)$ (on rappelle que $u = \frac{y}{t}$).
Et donc

$$y(t) = e^c e^{B(u(t))} u, \text{ si } K_1 \subset]0, +\infty[,$$

$$y(t) = -e^c e^{B(u(t))} u, \text{ si } K_1 \subset]-\infty, 0[,$$

avec $t(u)$ défini juste au-dessus.
Or $b(u) = \frac{1}{f(u) - u}$ a un signe invariable dans K_2, et ainsi $t(u)$ est strictement croissante ou décroissante sur K_2. Il en résulte que les courbes obtenues sont en fait des graphes de solutions. Ils sont deux à deux symétriques par rapport à 0 et on peut les représenter globalement par

$$t = -\lambda e^{B(u(t))}, \; y(u) = \lambda u e^{B(u(t))},$$

où λ est une constante non nulle.

CAS 2 :
Si on suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que
$f(\alpha) = \alpha$ (*i.e.* $f(u) - u = 0$).
L'équation $tu' = f(u) - u$ admet une solution constante $u \equiv \alpha$, et les deux demi-droites $y(t) = \alpha t$, $t > 0$ et $y(t) = \alpha t$, $t < 0$ sont solutions de (1.9) (attention, ne pas oublier que $t \neq 0$).
Inversement il est clair que cette relation entraîne (1.9).

On vient donc de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3
1. Les courbes intégrales de l'équation (1.9) telles que $(t, u) \in J \times K (K \subset I)$, où J est un intervalle ne contenant pas 0 et K un intervalle sur lequel $f(u) - u \neq 0$ sont en fait des graphes de solutions de l'équation (1.9). On peut les représenter par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t & = & \lambda e^{B(u)} \\ y & = & \lambda u e^{B(u)} \end{array} \right.$$

avec $u \in K$, $\lambda = constante \neq 0$, *et* $B(u) = \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u}$.
2. S'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ alors les deux demi-droites

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \alpha t \quad t > 0, \\ y & = & \alpha t \quad t < 0 \end{array} \right.$$

sont des solutions de (1.9).

1.3.3 Equations linéaires du premier ordre

Définition 9 *Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme*

$$A(t)y' + B(t)y = D(t)$$

On supposera dans toute la suite que A, B et D sont continues sur un intervalle I_0.

Intégration d'une équation linéaire sans second membre

Il s'agit d'une équation de la forme

$$A(t)y' + B(t)y = 0 \tag{1.10}$$

C'est une équation à variables séparables sur un pavé $I \times J$ ($I \subset I_0$) telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} A(t) \neq 0 & \text{pour tout } \; t \in I, \\ 0 \notin J & \qquad y \in J. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

Proposition 2 *L'ensemble des solutions de (1.10) sur le domaine I est définie pour tout $t \in I$ par $y(t) = ce^{F(t)}$ avec $F(t) = \int -\frac{B(t)}{A(t)}dt$ où c est une constante.*

Preuve. Elle est rapide et simple.

Il est important de noter d'autre part que $y \equiv 0$ est une solution triviale de l'équation.

Lemme 1 *Si une solution de l'équation (1.10) s'annule en au moins un point t_0 alors elle est identiquement nulle.*

Remarque 2 *La solution $y \equiv 0$ sur I est appelée intégrale dégénérée de l'équation (1.10).*

Lemme 2 *Toute solution y d'une équation différentielle ordinaire se prolonge en une solution maximale $\widetilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Intégration d'une équation linéaire avec second membre

Considérons l'équation

$$A(t)y' + B(t)y = D(t) \tag{1.12}$$

Désignons par $I \subset I_0$ un intervalle sur lequel $A(t)$ ne possède pas de racine. Soit y_0 une intégrale particulière non dégénérée de l'équation sans second membre associée à l'équation (1.12) sur I.

Proposition 3 *L'intégrale générale de l'équation (1.12) sur I est donnée par*

$$y(t) = y_0(t)(\int \frac{D(t)}{y_0(t)A(t)}dt + C)$$

où C est une constante.

Preuve : En classe.

Remarque 3 *On résume souvent la méthode utilisée pour intégrer l'équation (1.12) à partir d'une solution de l'équation (1.10) en disant que l'on considère la méthode de la "variation de la constante".*

Cas particulier :

Corollaire 1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, α une constante et $t_0 \in I$. La solution générale de l'équation scalaire*

$$y'(t) = \alpha y(t) + f(t)$$

est donnée par

$$y(t) = Ce^{\alpha t} + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)ds$$

où C est une constante.

Preuve En classe.

1.3.4 Equations de BERNOULLI

Définition 10 *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire de la forme*

$$y' + P(t)y + Q(t)y^r = 0, \tag{1.13}$$

où $r \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies continues sur un intervalle I_0 de $\mathbb{R}$.

Remarque 4 *On peut éliminer le cas $r = 0$ et $r = 1$ car l'équation (1.13) est alors une équation linéaire que l'on connaît déjà.*

Théorème 4 *Une fonction différentielle strictement positive (à cause des cas où $r = 1/2$ (le terme sous la racine carrée doit être positif, et si r est négatif, le terme au dénominateur ne doit pas être nul)) y sur I_0 est une solution de l'équation (1.13) si et seulement si $u = y^{1-r}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire*

$$u' + (1-r)P(t)u + (1-r)Q(t) = 0. \tag{1.14}$$

Preuve : Faite en classe.

Remarque 5
1. Connaissant la solution générale de l'équation (1.14), on peut déduire les solutions strictement positives de l'équation (1.13).
2.

- *Si $r > 0$ l'équation (1.13) admet la solution triviale $y \equiv 0$.*
- *Si $r > 1$ toute solution de l'équation (1.13) qui prend la valeur 0 en un point est partout nulle.*
- *Si $0 < r < 1$ la fonction nulle n'est pas nécessairement la seule solution qui prenne la valeur 0 en un point.*

3. L'équation particulière

$$t^2y' + y + y^2 = 0,$$

est appelée équation de RICATTI.

1.3.5 Equations de LAGRANGE et de CLAIRAUT

Définition 11 ***Equation de LAGRANGE*** *On appelle équation de Lagrange, toute équation du premier ordre scalaire de la forme*

$$y = tf(y') + g(y'), \tag{1.15}$$

où f et g sont définies, dérivables sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Définition 12 ***Equation de CLAIRAUT*** *On appelle équation de Clairaut toute équation de Lagrange telle que $f \equiv Id$, autrement dit*

$$y = ty' + g(y').$$

Proposition 4 *Les seules fonctions affines de l'équation de Lagrange (1.15) sont les fonctions $y(t) = mt + g(m)$, où m est une racine de l'équation $m = f(m)$ avec $m \in J$.*

Remarque 6 *Si de telles fonctions existent, alors elles sont globales sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $m \in J$, les fonctions $t \mapsto mt + g(m)$ sont les seules fonctions affines de l'équation de Clairaut et elles sont globales sur $\mathbb{R}$.*

1.3.6 Formulation générale -Equa. dif. totales - Facteurs intégrants

Rappel 1 *On appelle variation infinitésimale de t (resp. de y), celle qui peut être représentée par dt (resp. dy), où*

$$\begin{array}{rccc} dt: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (u,v) & \mapsto & dt(u,v) = u, \end{array} \qquad (resp.) \quad \begin{array}{rccc} dy: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & dy(u,v) = v. \end{array}$$

Définition 13 *Etant donné une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, continue sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$, et admettant des dérivées partielles du premier ordre en tout point de Δ, on appelle différentielle de f sur Δ l'application notée df telle que pour tout $(t,y) \in \Delta$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{rccc} df(t,y): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y)(u) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)(v). \end{array}$$

Remarque 7 *Pour tout $(t,y) \in \Delta$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$df(t,y)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)dt(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dy(u,v),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$df(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dy \tag{1.16}$$

Opérations utilisées :

1. Différentiation : $dfg = fdg + gdf$
2. Changement de variables : Si l'on pose $t = \varphi(s,h)$ et $y = \psi(s,h)$

alors $dt = d\varphi(s,h) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}ds + \dfrac{\partial \varphi}{\partial h}dh$

et $dy = d\psi(s,h) = \dfrac{\partial \psi}{\partial s} ds + \dfrac{\partial \psi}{\partial h} dh$
Et dans ce cas :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}[\frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + \frac{\partial \varphi}{\partial h} dh] + \frac{\partial f}{\partial y}[\frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \psi}{\partial h} dh], \\ &= [\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}] ds + [\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial h}] dh. \end{aligned}$$

3. Soient $f : \Delta \to \mathbb{R}$, et z une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que $\{(s, z(s))$, pour tout $s \in I\} \subset \Delta = G(z)$ (graphe de z) ;
et soit

$$\begin{array}{rccl} g : & I & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & g(s) = f(s, z(s)), \end{array}$$

on a alors, $dg = \dfrac{\partial f}{\partial s} ds + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz(s)$, ce qui donne également $g'(s) = \dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial z} z'(s)$

Définition 14 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$a(t,y) + b(t,y)y' = 0, \tag{1.17}$$

que l'on peut écrire plus généralement sous la forme

$$a(t,y)dt + b(t,y)dy = 0. \tag{1.18}$$

Supposons a et b continues sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$. On dit que l'équation (1.18) est une équation aux différentielles totales si et seulement si la fonction

$$f(t,y) = a(t,y)dt + b(t,y)dy,$$

est la différentielle d'une certaine fonction

$$w : (t,y) \mapsto w(t,y).$$

Autrement dit, il existe w telle que $f = dw$.

Remarque 8 *Si l'équation (1.18) est une équation aux différentielles totales, alors il existe w telle que $dw = f$ et alors l'équation (1.18) revient à écrire $dw(t,y) = 0$, c'est à dire $w(t,y) = C$, C constante. Et alors $\{(t,y) \in \Delta, w(t,y) = C\}$ est l'ensemble de toutes les courbes intégrales de l'équation (1.17).*

Remarque 9 *Parmi les courbes intégrales $w(t,y) = C$, on cherche les solutions y de l'équation (1.17) en résolvant $w(t,y) = C$ par rapport à y pour toutes les valeurs possibles de C.*

Grâce au théorème des fonctions implicites, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5 *Pour tout* $(t_0, y_0) \in \Delta$ *dans lequel* $\frac{\partial w}{\partial y}$ *n'est pas nulle, il passe au moins une solution de l'équation (1.17) et la fonction* y *correspondante s'obtient en résolvant par rapport à* y *au voisinage de* (t_0, y_0)*, l'équation* $w(t, y) = w(t_0, y_0)$.

Il existe un moyen classique de reconnaître une différentielle totale. Ce moyen est donné dans le

Théorème 5
Soient $(t, y) \mapsto a(t, y)$ *et* $(t, y) \mapsto b(t, y)$ *deux fonctions continues sur un pavé* $\Omega = I \times J$. *Supposons que* $\frac{\partial a}{\partial y}$ *et* $\frac{\partial b}{\partial t}$ *existent et sont continues sur* Ω *alors* $f(t, y) = a(t, y)dt + b(t, y)dy$ *est une différentielle totale si et seulement si pour tout* $(t, y) \in \Omega$

$$\frac{\partial a}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial b}{\partial t}(t, y). \tag{1.19}$$

1.3.7 Equation des facteurs intégrants

Considérons l'équation

$$a(t, y)dt + b(t, y)dy = 0 \tag{1.20}$$

Supposons que a et b sont continues sur un pavé ouvert $\Omega = I \times J$.

Définition 15 *On appelle facteur intégrant de l'équation (1.20) une fonction* $\mu : (t, y) \mapsto \mu(t, y)$ *définie, continue et sans zéro sur* Ω *telle que*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu a) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu b), \tag{1.21}$$

sur Ω.

Remarque 10 *Si* $f(t, y) = a(t, y)dt + b(t, y)dy$ *est une équation différentielle totale alors pour tout* $\mu \equiv k$ *(constante* $\neq 0$*),* μ *est un facteur intégrant de l'équation (1.20).*

Proposition 6 *Supposons en plus des propriétés spécifiques ci-dessus que les fonctions* a*,* b *et* μ *possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues sur* $I \times J$*. Dans ce cas* μ *est un facteur intégrant de (1.20) si et seulement si*

$$a\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial a}{\partial y} - b\frac{\partial \mu}{\partial t} - \mu\frac{\partial b}{\partial t} = 0 \ \text{ sur } \ \Omega$$

ou bien

$$a\frac{\partial \mu}{\partial y} - b\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial t})\mu = 0 \ \text{ sur } \ \Omega.$$

C'est l'équation des facteurs intégrants.

Chapitre 2

“Brève” théorie générale des équations différentielles

2.1 Problème de Cauchy en dimension finie

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On note $\|.\|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^m$.

Définition 16 *On considère une équation différentielle du premier ordre sous forme normale*

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \tag{2.1}$$

et on considère un point $(t_0, y_0) \in U$. Le problème de Cauchy correspondant à cette équation est la recherche des solutions y de (2.1) tels que $y(t_0) = y_0$.

Notation : Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(t, y), \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Définition 17 *Une solution du problème de Cauchy (2.2) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, avec la condition initiale $(t_0, y_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que*
i. Pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$,
ii. Pour tout $t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$,
iii. $y(t_0) = y_0$.

Théorème 6 *Supposons f continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et (t_0, y_0) un point fixé de U. Soit y une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ tel que $t_0 \in I$ ($y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$). Alors y est solution de problème de Cauchy (2.2) sur I si et seulement si*
1. pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$,
2. y est continue sur I,
3. pour tout $t \in I$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{2.3}$$

Preuve : En classe.

Remarque 11
1. L'équation (2.3) est appelée équation intégrale du problème de Cauchy.
2. On peut prendre pour I un intervalle fermé et semi-fermé d'intérieur non vide.

2.2 Localisation des solutions du problème de Cauchy

Soit D un cylindre fermé contenu dans l'ouvert U de la forme

$$D = [t_0, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, \beta),$$

où $\overline{B}(y_0, \beta)$ est la boule fermée de $\mathbb{R}^m$ définie par

$$\overline{B}(y_0, \beta) = \{z \in \mathbb{R}^m, \|z - y_0\| \leq \beta\}.$$

Supposons f continue sur U, elle est alors continue sur D, or D est fermé borné, donc f est bornée sur D. Posons

$$M = \max_{(t,y)\in D} \|f(t, y)\|.$$

Supposons que y soit une solution du problème de Cauchy (2.2) au point (t_0, y_0) sur un intervalle $I = [t_0, a[$. On a en particulier, pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$. On peut choisir a assez proche de t_0 tel que pour tout $t \in [t_0, a[$, $(t, y(t)) \in D$ (graphe de y dans D). Il résulte alors de l'équation (2.3) que pour tout $t \in [t_0, a[$,

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s)ds\|, \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)\|ds, \\ &\leq M|t - t_0|. \end{aligned}$$

D'une façon plus précise nous avons le résultat

Lemme 3 *Si $D = [t_0, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ est un cylindre fermé contenu dans l'ouvert U et $M = \max_{(t,y)\in D} \|f(t, y)\|$. Toute solution y du problème de Cauchy en (t_0, y_0) définie sur l'intervalle $I = [t_0, a[$ quand elle existe vérifie pour tout $t \in I$*

$$(t, y(t)) \in D \ \text{ et } \ \|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0), \tag{2.4}$$

à condition d'avoir $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \dfrac{\beta}{M}\}$.

Preuve : En TD ou en classe.

2.3 Méthode d'approximation de Picard - Existence et Unicité locale

On considère l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = \ & \{z \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}^m), z : I \to \mathbb{R}^m,\ I = [t_0, a[, \text{ un intervalle quelconque tel que} \\ & a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}, \text{ pour tout } (t, z(t)) \in D \text{ et } \|z(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)\}\end{aligned}$$

D'après le lemme (2.4), toute solution du problème de Cauchy en (t_0, y_0) qui est définie sur un intervalle $I = [t_0, a[$, tel que $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$, appartient à $\mathscr{F}$.
D'autre part, on considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathscr{F} & \to & \mathscr{F} \\ & z & \mapsto & Tz = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds. \end{array}$$

Cet opérateur est bien défini, en effet,
1. $z \in \mathscr{F}$ implique $z \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}^m)$ et donc l'application $t \mapsto f(t, z(t))$ est continue. Par conséquent $Tz = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds$ existe.
2. Pour tout $z \in \mathscr{F}$, $Tz \in \mathscr{F}$ car :
i. Tz est définie sur $I = [t_0, a[$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$
ii. $Tz \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}^m)$
iii. -à faire en classe -

Remarque 12 *$y \in \mathscr{F}$ est solution du problème de Cauchy sur (t_0, y_0) si et seulement si $Ty = y$.*

Lemme 4 *Supposons f continue sur U et qu'il existe un cylindre fermé $D = [t_0, t_0+\alpha] \times \overline{B}(y_0, \beta)$ contenu dans U sur lequel $f(t, y)$ soit LIPSCHITZIENNE en y de rapport H, autrement dit pour tout $(t, y_1) \in D$, pour tout $(t, y_2) \in D$*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq H\|y_1 - y_2\|.$$

Dans ces conditions, si y_1 et y_2 sont deux fonctions quelconques de $\mathscr{F}$ définies sur un même intervalle $I = [t_0, a[$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in I$

$$\|T^n y_2(t) - T^n y_1 f(t)\| \leq 2MH^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

avec $M = \sup_{(t,y)\in D} \|f(t, y)\|$.

Preuve : En classe.

Lemme 5 *Sous les hypothèses du Lemme (4), supposons que y soit une solution du problème de Cauchy (2.2) au point (t_0, y_0), définie sur $I = [t_0, a[$ avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. Dans ce cas, si y_1 est une fonction quelconque de $\mathscr{F}$ définie sur I, alors la suite $(T^n y_1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers y.*

Preuve : En classe.

Corollaire 2 ***(Unicité Locale)*** *Sous les hypothèses du lemme (4), si le problème de Cauchy (2.2) en (t_0, y_0) admet une solution sur $I = [t_0, a[$ avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$, alors cette solution est unique sur I.*

Preuve : En classe.

Le résultat précédent nous conduit naturellement à nous demander si la suite $(T^n y_1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, formée à partir d'une fonction y_1 quelconque de $\mathscr{F}$, ne converge pas vers une solution du problème de Cauchy.

Théorème 7 ***(Existence Locale)*** *Sous les hypothèses du Lemme (4), soit y_1 une fonction quelconque de $\mathscr{F}$ définie sur un intervalle $I = [t_0, a[$ avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. La suite $(T^n y_1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $y \in \mathscr{F}$ qui est solution du problème de Cauchy en (t_0, y_0) sur I .*

Preuve : En classe.

En rassemblant certains des résultats établis ci-dessus, nous pouvons énoncer le théorème général suivant :

Théorème 8 ***(Cauchy-Lipschitz-Picard, Existence et Unicité Locale)***
Soit $y' = f(t, y)$ une équation différentielle, dans laquelle f est définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et (t_0, y_0) un point quelconque dans U. Supposons f lipschitzienne en y sur un cylindre D de la forme

$$D = [t_0, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, \beta) \subset U,$$

et posons :

$$M = \sup_{(t,y)\in D} \|f(t, y)\| \text{ et } a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}.$$

Sous ces conditions, l'équation donnée admet dans chaque intervalle $[t_0, a[$ une solution unique y telle que $y(t_0) = t_0$.
Autrement dit, toute solution du problème de Cauchy au point (t_0, y_0) coïncide avec y sur l'intervalle $[t_0, a[$.

Remarque 13
i. Les résultats de ces deux derniers paragraphes se transposent d'eux-mêmes au cas des solutions du problème de Cauchy sur des intervalles situés à gauche de t_0.
ii. ATTENTION : la continuité de f au voisinage de (t_0, y_0) ne suffit pas à avoir l'unicité des solutions de Cauchy au point (t_0, y_0).
iii. D'autres démonstrations du Théorème (8) sont possibles :
- en utilisant la méthode d'approximation d'Euler et le Lemme de Gronwall, ou bien
- en utilisant le théorème du point fixe pour une application $T^n : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ strictement contractante.

AUTRE FORMULATION du théorème d'existence et d'unicité locale (peut-être plus simple à lire et à comprendre)

Définition 18 *On dit que l'application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y si pour tout $(t_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (t_0, y_0) dans U et un nombre réel $k = k(t_0, y_0) > 0$ tel que*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|,$$

pour tout $(t, y_1) \in V$, et pour tout $(t, y_2) \in V$

Théorème 9 *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement lipschitzienne et si $(t_0, y_0) \in U$, alors il existe un voisinage W de t_0 tel que le problème de Cauchy en (t_0, y_0) admet une solution et une seule sur W.*

2.4 Unicité globale

Lemme 6 *Toute solution y d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ est contenue dans une solution maximale $\widetilde{y}$.*

Preuve : En exercice.

Théorème 10 *Soient $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ où f est localement lipschitzienne en y sur U. Si y_1 et y_2 coïncident en un point t_0 de I alors $y_1 = y_2$ sur I.*

Preuve : En classe.

Corollaire 3 ***(Unicité Globale)*** *Si f est localement lipschitzienne en y sur U, alors pour tout $(t_0, y0) \in U$ il passe une solution maximale unique $y : I \to \mathbb{R}^m$, de plus, s'il existe une solution globale, elle est unique.*

Interprétation géométrique :
L'unicité globale signifie géométriquement que des intégrales distinctes ne peuvent pas se couper.

2.5 Points d'Unicité Locale et Globale d'un problème de Cauchy

Définition 19 ***(Points d'Unicité Globale et Locale)***
Soit $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$, (U ouvert), une équation différentielle sous forme normale, et (t_0, y_0) un point quelconque de U.
On dit que (t_0, y_0) est un point d'unicité globale, ou simplement un point d'unicité, s'il existe une solution maximale et une seule de l'équation donnée qui passe par (t_0, y_0).
On dit que (t_0, y_0) est un point d'unicité locale si l'on peut lui associer un intervalle ouvert I contenant t_0 de telle sorte que, parmi les solutions de l'équation, il en existe une et une seule qui soit définie sur I et qui passe par (t_0, y_0).

Théorème 11 ***Point d'Unicité Globale***
Soit y une solution maximale définie sur I de l'équation $y' = f(t, y)$. Si pour tout $t_0 \in I$, le point $(t_0, y(t_0))$ est un point d'unicité locale de cette équation, alors pour tout $t_0 \in I$, $(t_0, y(t_0))$ est un point d'unicité globale.

Corollaire 4
Si tout point (t_0, y_0) de U est un point d'unicité locale de l'équation $y' = f(t, y)$, alors c'est aussi un point d'unicité globale.

2.6 Théorèmes d'existence

Les travaux de Cauchy et Lipschitz permettent de distinguer nettement le problème de l'existence d'au moins une solution satisfaisant des conditions initiales données et le problème de l'unicité locale de cette solution. Comme nous le verrons, on peut prouver l'existence de solution locale en ne faisant qu'une hypothèse de continuité pour f, tandis que l'unicité n'est prouvée que sous une condition de Lipschitz.

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques compacts. On pose pour $k > 0$:
$Lip_k(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications de E_1 vers E_2 lipschitziennes de rapport k. Soit d la distance uniforme sur $Lip_k(E_1, E_2)$ définie par

$$d(u, v) = \sup_{x \in E_1} d_2(u(x), v(x)),$$

$u, v \in Lip_k(E_1, E_2)$.

Théorème 12 *$Lip_k(E_1, E_2, d)$ est un espace métrique compact.*

Preuve : A admettre. Il s'agit d'un résultat de nature topologique qui se déduit directement d'un théorème appelé théorème d'Ascoli que vous verrez plus tard.

Théorème 13 ***(Existence locale Cauchy-Peano)*** *On suppose que la fonction f est continue dans un voisinage du point (t_0, y_0) dans U, alors il existe un intervalle I_0, voisinage de t_0 et une fonction y telle que*
i. pour tout $t \in I_0$, $(t, y(t)) \in U$
ii. pour tout $t \in I_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$
iii. $y(t_0) = y_0$

Preuve : En classe.

Cherchons maintenant des conditions suffisantes des solutions globales du problème de Cauchy. Supposons f définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ avec $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ ou $I = [t_0, t_0 + \alpha[$ ou $I = [t_0, +\infty[$ et cherchons des conditions sur f pour avoir l'existence de solutions définies sur I tout entier.
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Lemme 7 *On suppose que f est définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ et que $I = [t_0, t_0+\alpha]$ ou $[t_0, t_0+\alpha[$ ou $[t_0, +\infty[$ alors si $y : J \to \mathbb{R}^m$, $J \subset I$, est une solution maximale non globale de (2.5) sur I, alors J est de la forme $J = [t_0, t_1[$, $t_1 < t_0 + \alpha$ (ou $t_1 < +\infty$) et y n'est pas bornée sur J.*

Nous allons maintenant donner un théorème d'existence globale.

Théorème 14 ***(Existence Globale)*** *On suppose f continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ (attention, il faut que ce soit $\mathbb{R}^m$, c'est une condition nécessaire, sinon c'est faux), $I = [t_0, t_0 + \alpha[$ ou bien $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ ou encore $I = [t_0, +\infty)$ et qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$ noté $< ., . >$ associé à la norme $\|.\|$ et une fonction $l : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^m$*

$$< f(t, y), y > \leq l(t)(1 + \|y(t)\|^2) \tag{2.6}$$

alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(t, y), \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

admet au moins une solution définie sur l'intervalle I tout entier (solution globale sur I).

Corollaire 5 *On suppose que f est définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^m$, que $I = [t_0, t_0 + \alpha[$ ou bien $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ ou encore $I = [t_0, +\infty)$ et qu'il existe une fonction intégrable sur I telle que pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^m$*

$$\|f(t, y)\| \leq l(t)(1 + \|y(t)\|^2)$$

alors le problème (2.5) admet au moins une solution globale sur I.

Autre condition suffisante d'existence de solutions globales :

Théorème 15 ***(Condition Suffisante d'Existence de Solutions Globales)*** *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ avec $I = [t_0, t_0 + \alpha[$ ou bien $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ ou encore $I = [t_0, +\infty)$. Supposons qu'il existe une fonction $k : I \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $t \in I$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^m$. Alors toute solution maximale de l'équation (2.5) est globale sur I.*

Chapitre 3

Equations différentielles d'ordre supérieur

3.1 Problèmes avec conditions initiales et conditions aux bords

3.1.1 Problèmes avec conditions initiales

Un problème d'ordre n à conditions initiales est du type

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = g(x) \tag{3.1}$$

avec $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ... , $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
Si l'on réécrit l'équation sous forme normale, autrement dit

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

où $f : U \times \mathbb{R}^n$ est une application continue, définie sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n$. Une solution de (3.2) est une application $y : I \to \mathbb{R}^m$, n-fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, telle que
(i) Pour tout $t \in I$, $(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \in U$,
(ii) Pour tout $t \in I$, $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t))$.

Nous avons vu dans le premier chapitre comment se ramener à l'ordre 1. Autrement, dit, tout système différentiel (3.2) d'ordre n dans $\mathbb{R}^m$ est donc équivalent à un système différentiel d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^m)^n$. Il en résulte que les théorème d'existence et d'unicité démontrés dans le chapitre précédent pour les systèmes d'ordre 1 sont encore vrais pour les systèmes d'ordre n. En voici les principaux énoncés :

Théorème 16 ***EXISTENCE*** *Pour tout point $(t_0, y_0, y_1, ..., y_{(n-1)}) \in U$, le problème de Cauchy avec les conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, ... , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ admet, sous la condition que $f : U \times \mathbb{R}^n$ est une application continue, définie sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n$, au moins une solution y définie sur un voisinage de t_0.*

Théorème 17 ***EXISTENCE ET UNICITE*** *Si en plus du fait que $f : U \times \mathbb{R}^n$ est une application continue, définie sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n$, f est localement lipschitzienne* *en $(y_0, y_1, ..., y_{(n-1)})$ sur U, c'est à dire, que si pour tout $(t_0, y_0, y_1, ..., y_{(n-1)}) \in U$ il existe un voisinage V de $(t_0, y_0, y_1, ..., y_{(n-1)})$ dans U et k un réél strictement positif tels que*

$$\|f(t_0, u_0, u_1, ..., u_{(n-1)}) - f(t_0, v_0, v_1, ..., v_{(n-1)})\| \leq k(\|u_0 - v_0\| + \|u_1 - v_1\| + ... + \|u_{n-1} - v_{n-1}\|),$$

alors le problème de Cauchy de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, ... , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ admet une solution et une seule définie sur un voisinage de t_0.

Théorème 18 ***Solutions Globales*** *Si $U = I \times (\mathbb{R}^m)^n$, et s'il existe une fonction $k : I \to \mathbb{R}_+$ continue telle que pour tout $t \in I$*

$$\|f(t_0, u_0, u_1, ..., u_{(n-1)}) - f(t_0, v_0, v_1, ..., v_{(n-1)})\| \leq k(\|u_0 - v_0\| + \|u_1 - v_1\| + ... + \|u_{n-1} - v_{n-1}\|),$$

alors les solutions maximales sont globales sur I.

3.1.2 Problèmes avec conditions aux bords

ORDRE 2 : Ce sont des problèmes de la forme

$$a_2(x)y''(x) + a_1y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{3.3}$$

avec les conditions $y(a) = y_0$ et $y(b) = y_1$.

Remarque 14 *On peut également avoir les conditions aux bords suivantes*

$$\begin{array}{ll} y'(a) = y_0, & y(b) = y_1, \\ y(a) = y_0, & y'(b) = y_1, \\ y'(a) = y_0, & y'(b) = y_1. \end{array}$$

ATTENTION : Un problème avec conditions aux bords peut avoir plusieurs solutions, une unique solution ou bien pas de solutions du tout.

3.1.3 Equations homogènes

Une équation linéaire d'ordre n de la forme

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0, \tag{3.4}$$

est homogène, tandis que l'équation 3.1 est dite non homogène.
Dans la suite, on suppose que les coefficients a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ sont continus sur I, que g est continue, et que $a_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

3.1.4 Opérateur différentiel

Soit $Dy = \dfrac{dy}{dx}$. D est appelé opérateur différentiel dans les où il transforme une fonction différentiable en une autre fonction.

Exemple 8 $D(\cos 4x) = -4\sin(4x)$.

Alors $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = D(Dy) = D^2y$.
Et plus généralement, $\dfrac{d^n}{dx^n}y = D^ny$, où y représente une fonction suffisamment différentiable.
Un opérateur différentiable d'ordre n est défini par

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_1(x)D + a_0(x),$$

L est linéaire.
En effet, $D(cf(x)) = cDf(x)$, c =constante. $D(f+g) = Df + Dg$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES :
Toute équation différentielle peut alors être exprimée en termes d'opérateur D.

Exemple 9 *$y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ s'écrit alors $D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$, soit encore, $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$.*

Par conséquent l'équation (3.4) s'écrit $L(y) = 0$ et l'équation (3.1) s'écrit $L(y) = g(x)$.

3.1.5 Principe de substitution

Dans le résultat qui suit, nous voyons que la somme ou superposition de deux solutions ou plus d'une équation différentielle linéaire homogène est aussi une solution (ce résultat est important et sera utilisé souvent par la suite).

Théorème 19 ***PRINCIPE DE SUPERPOSITION - EQUATIONS HOMOGENES***
Soient $y_1, ..., y_k$ des solutions de l'équation homogène d'ordre n, (3.4) sur un intervalle I. Alors la combinaison linéaire

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x),$$

où $c_i = 1, ..., k$ sont des constantes arbitraires, est aussi une solution sur I.

Corollaire 6
1. Si y_1 est solution de (3.4), alors $y = c_1y_1(x)$ est aussi solution,
2. Une équation différentielle linéaire homogène possède toujours la solution triviale $y \equiv 0$.

3.1.6 Dépendance et indépendance linéaire

Définition 20 *Un ensemble de fonctions f_1, f_2, ..., f_n est linéairement dépendant sur un intervalle I s'il existe des constantes c_1, c_2, ..., c_n non toutes nulles telles que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0,$$

pour tout $x \in I$, sinon, l'ensemble des fonctions est dit linéairement indépendant, c'est à dire, $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$ implique que les $c_i = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$, et pour tout $x \in I$.

Exemple 10 *Si f_1 et f_2 sont linéairement dépendants, avec $f_2(x) \neq 0$, alors il existe c constant tel que $f_1 = cf_2$, autrement dit $\dfrac{f_1}{f_2} = c$ =constante !*

3.1.7 Solution d'équa. diff. pour les solutions linéairement indép. d'équa. diff. linéaires

Définition 21 ***WRONSKIEN*** *Supposons que chacune des fonctions f_1, f_2,...,f_n possède $n-1$ dérivées. Le déterminant*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \dots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est appelé le WRONSKIEN des fonction f_i, $i = 1, ..., n$.

Théorème 20 ***CRITERE POUR LES SOLUTIONS LINEAIREMENT INDEPENDANTES*** *Soient y_1, y_2, ..., y_n, n solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre n, (3.4) sur I. Alors l'ensemble des solutions est linéairement indépendant sur I si et seulement si*

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0,$$

pour tout $x \in I$.

Définition 22 *Tout ensemble y_1, y_2, ..., y_n de n solutions linéairement indépendants de l'équation différentielle homogène d'ordre n 3.4 sur un intervalle I est appelé ENSEMBLE FONDAMENTAL des solutions sur I.*

Théorème 21 ***SOLUTIONS GENERALES D'UNE EQUATION HOMOGENE*** *Soient y_1, y_2, ..., y_n, n solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre n, (3.4) sur I. Alors la solution générale de l'équation sur I est donnée par $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$ où les c_i, $i = 1, ..., n$ sont des constantes.*

3.1.8 Solutions générales d'équations nonhomogènes

NOTATION : Notons y_p une solution particulière (ou intégrale particulière) de (3.1).

Théorème 22 *Soit y_p une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (E.D.L.) non homogène d'ordre n (3.1) sur I et soit $(y_1, y_2, ..., y_n)$ un ensemble fondamental de solutions de l'E.D.L. homogène associée (3.4) sur I. Alors la solution générale de l'équation est donnée par*

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_p,$$

pour tout $x \in I$ et où les c_i, $i = 1, ..., n$ sont des constantes.

NOTATION :
la combinaison linéaire $y_c = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_p$ est appelée fonction complémentaire pour l'équation (3.1) alors la solution générale de 3.1 sur I est donnée par $y = y_c + y_p$.

Théorème 23 ***PRINCIPE DE SUPERPOSITION - EQUATIONS NON HOMOGENES***
Soient y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_k}, k solutions de l'équation linéaire non homogène d'ordre n (3.1) sur I correspondant à k fonctions distinctes g_1,g_2,...,g_k, i.e. , les y_{p_i} sont solutions de l'équation

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

où $i = 1, 2, ..., k$ alors $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + ... + y_{p_k}$ est une solution particulière de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + ... + g_k(x).$$

3.2 Réduction d'ordre

Considérons l'équation homogène d'ordre 2

$$a_2(x)y''(x) + a_1y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x). \tag{3.5}$$

Supposons que y_1 soit une solution non triviale de (3.5) définie sur I. Nous cherchons alors une seconde solution y_2 telle que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants sur I (*i.e.* $y_2/y_1 \neq C$ (C constante), autrement dit il existe une fonction u telle que $y_2(x)/y_1(x) = u(x)$, ou encore $y_2(x) = u(x)y_1(x)$)

Si nous divisons par $a_2(x)$ (on rappelle qu'on suppose que $a_2(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), alors l'équation (3.5) devient

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3.6}$$

où P et Q sont des fonctions continues sur I.

Supposons que y_1 soit une solution connue de (3.6) sur I et que $y_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Si nous définissons $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, il suit alors que $y_2' = uy_1' + u'y_1$ et $y_2'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$ et donc l'équation (3.6) nous amène à considérer l'équation suivante

$$y_2'' + Py_2' + Qy = u[y_1'' + Py_1' + Qy_1] + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

Le terme $y_1'' + Py_1' + Qy_1$ entre les crochets vaut 0 étant donné que y_1 est une solution connue de (3.6) , et donc nous devons avoir $y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$. Si nous notons $w = u'$, alors, par ce changement de variable nous obtenons l'équation suivante

$$y_1w' + 2(y_1' + Py_1)w = 0, \tag{3.7}$$

qui est une équation séparable linéaire que nous connaissons bien. Sa résolution se fait comme suit :
l'équation (3.7) implique

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2(y_1' + Py_1)}{y_1}w = 0,$$

soit encore

$$\frac{dw}{w} = - + \frac{2(y_1')}{y_1}dx - Pdx.$$

Autrement dit

$$ln|w| = -ln|y_1^2| - \int Pdx + C,$$

et donc

$$ln|wy_1^2| = -\int Pdx + C,$$

$$wy_1^2 = C_1e^{\int Pdx},$$

et par conséquent

$$w = C_1e^{\int Pdx}/y_1^2.$$

Or, $w = u'$, donc $u = C_1 \displaystyle\int \frac{C_1e^{\int P(s)ds}}{y_1^2}dx + C_2$. Si l'on choisit $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$ alors

$$y_2 = u(x)y(x) = y_1(x) \int \frac{C_1e^{\int P(s)ds}}{y_1^2}dx.$$

3.3 Equation linéaire homogène avec coefficients constants

3.3.1 Ordre 2

Considérons d'abord l'équation d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.8}$$

Si l'on essaie une solution de la forme $y = e^{mx}$, alors $y' = me^{mx}$ et $y'' = m^2e^{mx}$. En appliquant cette solution à l'équation (3.8) on obtient alors $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$. Autrement dit $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$. Puisque $e^{mx} \neq 0$ alors $y = e^{mx}$ satisfait (3.8) si et seulement si

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{3.9}$$

On appelle (3.9) équation caractéristique ou équation auxiliaire. Nous posons $\Delta = b^2 - 4ac$, $m_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $m_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Trois cas sont alors envisagés.
CAS 1 : $\Delta > 0$ (2 racines réelles distinctes)
Nous avons alors deux solutions $y_1 = e^{m_1x}$ et $y_2 = e^{m_2x}$. Ce sont des fonctions linéairement indépendantes, donc elles forment un ensemble fondamental. La solution général sera donc une combinaison linéaire des deux, autrement dit : $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.
CAS 2 : $\Delta = 0$ (racine double : $m_1 = m_2 = -\dfrac{b}{2a}$)
Nous avons alors une seule solution exponentielle qui est $y_1 = e^{m_1x}$. Alors d'après le paragraphe précédent $y_2 = e^{m_1x}\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(s)ds}}{e^{2m_1x}}dx$. Mais $P = \dfrac{b}{a}$ et $m_1 = -\dfrac{b}{2a}$, et donc $P = -2m_1$, et donc

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x}\int dx = xe^{m_1x}.$$

Alors la solution générale est $y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$ soit encore $y = e^{m_1x}(c_1 + c_2x)$.
CAS 3 : $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguées)
Si m_1 et m_2 sont complexes, nous pouvons écrire

$$m_1 = \alpha + i\beta \text{ et } m_2 = \alpha - i\beta, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0 \text{ et } i^2 = -1.$$

Comme dans le cas 1,

$$y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Or on rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ donc $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$ et $e^{-i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta$. D'où

$$e^{i\beta} + e^{-i\beta} = 2\cos\beta \text{ et } e^{i\beta} - e^{-i\beta} = 2i\sin\beta.$$

Puisque $y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ est solution de (3.8) pour c_1 et c_2 quelconques, alors si

$$c_1 = c_2 = 1,$$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e\alpha x(e^{(i\beta)x} + e^{(-i\beta)x} = 2e^{\alpha x}cos\beta x$$

mais on peut également prendre

$$c_1 = 1 \text{ et } c_2 = -1$$

et donc

$$y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e\alpha x(e^{(i\beta)x} - e^{(-i\beta)x} = 2ie^{\alpha x}sin\beta x.$$

D'après le corollaire du paragraphe précédent , $e^{\alpha x}cos\beta x$ et $e^{\alpha x}sin\beta x$ sont des solutions réelles de (3.8) et forment un ensemble fondamental sur $(-\infty, +\infty)$. La solution générale est donc

$$y = c_1 e^{\alpha x}cos\beta x + c_2 e^{alphax}sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x).$$

3.3.2 Ordre supérieur

En général pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n, où les a_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont des constantes réelles, nous devons résoudre une équation polynomiale de degré n.

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + ... + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{3.10}$$

Si toutes les racines sont réelles et distinctes, alors la solution générale de l'équation différentielle homogène d'ordre n est

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x},$$

sinon, il faut faire l'étude des différents cas -Fastidieux-
Si m_1 est une racine d'ordre de multiplicité k, les solutions linéaires indépendantes sont $e^{m_1 x}$, $xe^{m_1 x}$, $x^2 e^{m_1 x}$,...,$x^{k-1}e^{m_1 x}$, plus toutes les autres racines.

3.4 Coefficients indéterminés- Approche par superposition

Nous proposons ici une méthode pour obtenir une solution particulière y_p de l'équation (3.1) dont nous rappelons l'équation ci-dessous :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = g(x)$$

en fonction des différentes formes du second membre g.

Méthode des coefficients indéterminés :
Rappelons d'abord que la fonction complémentaire de (3.1) est notée y_c, les coefficients a_i, $i = 1, ..., n$ sont constants, et enfin que pour notre étude, $g(x) \equiv C$, C constante, ou alors un polynôme ou une exponentielle ou un sin, ou un cos, ou des sommes finies et produits de ces fonctions.

Récapitulons tous les résultats "classiques" dans le tableau suivant.

	Formes de g	Formes de y_p
1.	1	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Bx+C
5.	$\sin(4x)$	$A\cos(4x)+B\sin(4x)$
6.	$\cos(4x)$	$A\cos(4x)+B\sin(4x)$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}\sin(4x)$	$Ae^{3x}\cos(4x)+Be^{3x}\sin(4x)$
11.	$5x^2\sin(4x)$	$(Ax^2+Bx+C)\cos(4x)+(Ex^2+Fx+G)\sin(4x)$
12.	$xe^{3x}\cos(4x)$	$(Ax+B)e^{3x}\cos(4x)+(Cx+E)e^{3x}\sin(4x)$

3.5 Coefficients indéterminés- Approche de l'annihilateur

Si on écrit l'équation (3.1) sous la forme

$$a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y^{n-1}+...+a_1Dy+a_0y=g(x), \tag{3.11}$$

où $D^ky=\dfrac{d^ky}{dx^k}=y^k$, $k=0,1,...,n$.
L'équation (3.11) est équivalente à l'équation

$$L(y)=g(x),$$

où L est un opérateur linéaire d'ordre n.

3.5.1 Mise en facteurs d'opérateurs

Quand les a_i, $i=0,1,...,n$ sont des **constantes réelles**, un opérateur différentiel linéaire L peut être factorisé dès lors que le polynôme caractéristique $a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+...+a_1n+a_0$ se factorise.
Autrement dit, si r_1 est une racine de l'équation auxiliaire, on a $L=(D-r_1)P(D)$ où $P(D)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre $n-1$.
N.B. : les facteurs d'un opérateur différentiel avec coefficients constants commutent.

3.5.2 Opérateur annihilateur

Si L est un opérateur différentiel linéaire avec coefficients constants et f une fonction "suffisamment" dérivable telle que $L(f(x))=0$, alors L est dit "annihilateur" de la fonction.

Propriété 1
1. L'opérateur linéaire D^n annihile 1, x, x^2, ..., x^{n-1}.
2. L'opérateur linéaire $(D-\alpha)^n$ annihile $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, $x^2e^{\alpha x}$, ..., $x^{n-1}e^{\alpha x}$.
3. L'opérateur linéaire $[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$ annihile $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, ..., $x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$,

$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x)$, ..., $x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
4. Si L_1, L_2 sont des opérateurs différentiels linéaires avec coefficients constants tels que L_1 annihile $y_1(x)$ et L_2 annihile $y_2(x)$, mais $L_1(y_2(x)) \neq 0$ et $L_2(y_1(x)) \neq 0$, alors L_1L_2 annihile $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Preuve : En exercice.

3.5.3 Coefficients indéterminés

Supposons que $L(y) = g(x)$ est une équation différentielle linéaire avec des coefficients constants et $g(x)$ est la somme finie ou le produit fini de fonctions

$$1,\ x,\ x^2, ...,$$

$$x^{n-1},\ e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ ...,\ x^{n-1}e^{\alpha x},$$

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ ...,\ x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x),\ ...,\ x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

autrement dit des combinaisons linéaires de k, x^m, $x^me^{\alpha x}$, $x^me^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $x^me^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
Alors $g(x)$ peut être annihilé par un opérateur L d'ordre minimum composé d'opérateurs D^n, $(D-\alpha)^n$ et $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$ en appliquant L de chaque côté de $L(y) = g(x)$ on obtient $L_1(L(y)) = L_1(g(x)) = 0$. On résout alors l'équation homogène d'ordre supérieur $L_1(L(y)) = 0$. Ceci nous permet d'obtenir une solution particulière y_p de l'équation homogène $L(y) = g(x)$ pour trouver une solution particulière.

Résumé :

L'équation différentielle $L(y) = g(x)$ a des coefficients constants et g est composée de sommes et produits finis de constantes, polynômes, fonctions exponentielles, sinus et cosinus.

i. Trouver une solution complémentaire y_c pour l'équation homogène $L(y) = 0$.
ii. Appliquer L_1 de chaque côté à $L(y) = g(x)$ où L_1 annihile g.
iii. Trouver la solution générale de l'équation générale de l'équation différentielle homogène d'ordre supérieur $L_1(L(y)) = 0$.
iv. Supprimer les solutions de l'étape iii., tous les termes trouvés dupliqués dans la solution y_c de l'étape i. Former une combinaison linéaire y_p des termes qui restent, c'est la forme d'une solution particulière de $L(y) = g(x)$.
v. Substituer y_p trouver dans iv. dans $L(y) = g(x)$. Faire correspondre les coefficients.
vi. Former la solution $y = y_c + y_p$.
Attention :
Cette méthode ne marche pas si : les coefficients ne sont pas constants ou bien les coefficients sont constants et $g(x) = ln(x)$ ou $\dfrac{1}{x}$ ou $tan(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$ etc... d'où l'intérêt du paragraphe suivant.

3.6 Variations des paramètres

3.6.1 Ordre 2

Considérons l'équation suivante

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

Si $a_2 \neq 0$, on divise par a_2 et on obtient

$$y'' + Py' + Qy = f(x).$$

Considérons f continue sur I. Trouver une solution complémentaire y_c de l'équation homogène associée est déjà fait. Le but est de trouver une solution particulière. De façon analogue à l'équation différentielle linéaire du premier ordre, nous cherchons une solution particulière de la forme

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

où y_1 ey y_2 forment un ensemble fondamental des solutions sur I de l'équation homogène associée. On a alors

$$y'_p = u_1y'_1 + u'_1y_1 + u_2y'_2 + u'_2y_2$$

$$y''_p = u_1y''_1 + 2u'_1y'_1 + u''_1y_1 + u_2y''_2 + 2u'_2y'_2 + u''_2y_2$$

alors

$$\begin{aligned} y''_p + Py'_p + Qy_p &= u_1[y''_1 + Py'_1 + Qy_1] + u_2[y''_2 + Py'_2 + Qy_2] \\ &\quad +y_1u''_1 + u'_1y'_1 + y_2u''_2 + u'_2y'_2 + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2, \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u'_1] + \frac{d}{dx}[y_2u'_2] + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2, \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u'_1 + y_2u'_2] + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x). \end{aligned}$$

Puisqu'on doit trouver u_1, u_2, les deux fonctions inconnues, on a besoin de deux équations. On suppose également que $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$.
Pourquoi ? Parce qu'ainsi on n'a plus que $y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0, \\ y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x). \end{cases}$$

On peut ainsi exprimer ce système avec l'aide des déterminants (WRONSKIENS) :

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-y_2f(x)}{W}, \text{ et } u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1f(x)}{W},$$

où

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \text{ et } W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix},$$

avec la règle de CRAMER.
On trouve alors u_1 et u_2 en intégrant les résultats ci-dessus.
N.B. : $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ parce que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants pour tout $x \in I$.

En résumé :
Pour résoudre $a_2 y_2'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$ (ou $y'' + Py' + Qy = f(x)$) .
i. On trouve $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
ii. On calcule $W(y_1(x), y_2(x))$.
iii. On trouve $u_1' = \dfrac{W_1}{W}$ et $u_2' = \dfrac{W_2}{W}$ et $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
d'où $y = y_c + y_p$ (NE PAS OUBLIER CETTE OPERATION FINALE).

3.6.2 Equations d'ordre supérieur

Considérons l'équation

$$y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + ... + P_1 y' + P_0 y = f(x).$$

Si $y_c = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ est la fonction complémentaire, alors une solution particulière est

$$y_p = \sum_{i=1}^n u_i(x) y_i(x),$$

où les u_k', $k = 1, 2, ..., n$ sont déterminés par les n équations

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' + ... + y_n u_n' & = & 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + ... + y_n' u_n' & = & f(x), \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + ... + y_n^{(n-1)} u_n' & = & f(x). \end{cases}$$

Règle de CRAMER : On pose $u_k' = \dfrac{W_k}{W}$, $k = 1, 2, ..., n$, où W = WRONSKIEN de y_1, y_2, ..., y_n et

$$W_k = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & f(x) & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

3.7 Equation de Cauchy-Euler

Les coefficients ne sont pas constants, mais de la forme $a_k x^k = a_k(x)$. Considérons l'équation de Cauchy-Euler

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{(n-1)} x^{(n-1)} y^{(n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

où les a_i, $i = 0, ..., n$ sont constants.

3.7.1 Equation homogène d'ordre 2

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \tag{3.12}$$

ATTENTION : $ax^2 = 0$ si $x = 0$ donc $I \subset]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$

METHODE DE RESOLUTION
Considérons $y = x^m$ où m est à déterminer. Alors

$$a_k x^k y^{(k)} = a_k x^k m(m-1)(m-2)...(m-k+1)x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2)...(m-k+1)x^m.$$

Donc, à l'ordre 2,

$$\begin{aligned} ax^2 y'' + bxy' + cy &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m, \\ &= (am(m-1) + bm + c)x^m. \end{aligned}$$

Donc y est solution de (3.12) si et seulement m est solution de l'équation auxiliaire $am(m-1) + bm + c = 0$ ou encore $am^2 + (b-a)m + c = 0$.
CAS 1 :
2 racines réelles distinctes m_1 et m_2 tels que $m_1 \neq m_2$. $y_1 = x^{m_1}$ et $y_2 = x^{m_2}$ forment un ensemble de solutions fondamentales. La solution générale est $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$.
CAS 2 :
une racine double $m_1 = m_2 = -\dfrac{(b-a)}{2a}$ et une solution $y = x^{m_1}$. Pour construire l'autre solution y_2 nous écrivons (3.12) sous la forme

$$\frac{d^2}{dx^2} y + \frac{b}{ax}\frac{d}{dx} y + \frac{c}{ax^2} y = 0.$$

On identifie $P(x) = \dfrac{b}{ax}$ et $\displaystyle\int \frac{b}{ax} dx = \frac{b}{ax} \ln |x|$. Alors

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{m_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{ax} \ln x}}{x^{2m_1}} dx, \\ &= x^{m_1} \int \frac{x^{-\frac{b}{ax}}}{x^{2m_1}} dx, \\ &= x^{m_1} \int \frac{x^{-\frac{b}{ax}}}{x^{\frac{(b-a)}{a}}} dx, \\ &= x^{m_1} \int \frac{dx}{x} = x^{m_1} \ln x. \end{aligned}$$

Alors l'équation générale est $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$.
CAS 3 :
Racines complexes conjuguées

$$m_1 = \alpha + i\beta \text{ et } m_2 = \alpha - i\beta, \, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ et } \beta > 0$$

alors une solution est $y = c_1 x^{\alpha+i\beta} + c_2 x^{\alpha-i\beta}$ mais

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x},$$

donc $x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta \ln(x))$ et $x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2\sin(\beta \ln(x))$.
Si on prend $c_1 = c_2 = 1$ et $c_1 = c_2 = -1$ il vient que

$$y_1 = x^\alpha (x^{i\beta} + x^{-i\beta}) = 2x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

et

$$y_2 = x^\alpha (x^{i\beta} - x^{-i\beta}) = 2ix^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

sont aussi solutions et

$$W(x^\alpha \cos(\beta \ln x) \;\; x^\alpha \sin(\beta \ln x) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0 \; (\beta > 0),$$

alors sur l'intervalle $(0, +\infty)$ $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ et $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ forment un ensemble de solutions réelles de l'équation différentielle et donc

$$y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)].$$

3.8 Résoudre des systèmes d'équations linéaires par élimination

En TD.

Chapitre 4

Séries solutions d'équations différentielles linéaires

4.1 Solution autour de points ordinaires

4.1.1 Rappel sur les séries entières

Définition 23 ***Série entière*** *Une série entière en $x-a$ est une série de la forme*

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \tag{4.1}$$

c'est la série entière centrée en a. Ici, nous nous intéressons surtout aux séries entières centrées en $a = 0$.

Définition 24 ***Convergence*** *Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est convergente vers une valeur spécifique si sa suite de sommes partielles $S_n(x)$ converge i.e. $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ existe. Si une telle limite n'existe pas, on dit que la série est divergente.*

Définition 25 ***Intervalle de convergence*** *Toute série entière a un intervalle de convergence. L'intervalle de convergence est l'ensemble des réels x pour lesquels la série converge.*

Définition 26 ***Rayon de convergence*** *Toute série entière a un rayon de convergence R. Si $R > 0$ alors une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge pour $|x-a| < R$. Si la série converge seulement en son centre a, alors $R = 0$. Si la série converge pour tout x alors $R = +\infty$.*

Définition 27 ***Convergence absolue*** *Dans l'intervalle de convergence, une série entière converge absolument, i.e. si x appartient à l'intervalle de convergence alors $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$ converge.*

Test de convergence : Supposons $c_n \neq 0$ pour tout n et que
$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}| = |x-a| \lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = L.$
Si $L < 1$ la série converge absolument.
Si $L > 1$ la série diverge.

si $L = 1$ on ne peut répondre qu'au cas par cas.

Fonctions développables en séries entières :
Une série entière définit une fonction $f : x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ dont le domaine est l'intervalle de convergence de la série. Si le rayon de convergence est $R > 0$, alors f est continue, différentiable et intégrable sur l'intervalle $(a-R, a+R)$. De plus, $f'(x)$ et $\displaystyle\int f(x)dx$ peuvent se déduire par une différentiation ou un intégration terme à terme. Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est une série entière en x, alors les deux premières dérivées sont
$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ et
$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$.

Propriété d'identité : Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0$, $R > 0$ pour tout x dans l'intervalle de convergence alors $c_n = 0$ pour tout n.
Fonction analytique : Une fonction f est analytique en a si elle peut être représentée par une série entière en $x-a$ avec un rayon de convergence $R > 0$ ou $+\infty$.

4.1.2 Solutions sous forme de séries entières

Supposons que l'équation différentielle linéaire de second ordre

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4.2}$$

peut s'écrire sous la forme standard

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.3}$$

4.2 Solutions autour des points singuliers

Définition 28 *Une point x_0 est un point ordinaire de l'équation différentielle (4.2) si P et Q de la forme standard (4.3) sont analytiques en x_0. Un point qui n'est pas ordinaire est un point singulier de l'équation.*

Théorème 24 ***Existence de solutions en séries entières*** *si $x = x_0$ est un point ordinaire de l'équation différentielle (4.2) nous pouvons toujours trouver des solutions linéairement indépendantes de la forme des séries entières centrées en x_0 c'est à dire $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$.*

Une série solution converge au moins sur un intervalle défini par $|x - x_0| < R$ où R est la distance de x_0 au point singulier le plus proche.

Méthode de FROBENIUS : Pour résoudre l'équation différentielle (4.2) autour d'un point singulier nous employons le théorème suivant :

Théorème 25 ***THEOREME DE FROBENIUS*** *si $x = x_0$ est un point ordinaire de l'équation différentielle (4.2) alors il existe au moins une solution de la forme $y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^{n+r}$ où r est une constante à déterminer. La série converge alors au moins sur un intervalle $0 < x - x_0 < R$.*

4.3 Deux équations spéciales

Equations de BESSEL : $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, $\nu \geq 0$,

Equations de LEGENDRE : $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, $n \geq 0$.

Ces deux équations seront étudiées en T.D.

Chapitre 5

Transformée de Laplace

5.1 Rappel

1. En première année, on a vu que la différentiation et l'intégration sont des transformées, *i.e.* ces opérations transforment une fonction en une autre. De plus, ces deux transformées sont linéaires. Dans ce chapitre, nous allons étudier une transformée particulière : la TRANSFORMEE DE LAPLACE.
2. Transformée intégrale : si $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est une fonction à deux variables alors une intégrale définie par rapport à une des deux variables conduit à une fonction de l'autre variable *i.e.* $F(y) = \int f(x, y)dx$. De façon analogue une intégrale définie $\int_a^b K(s, t)f(t)dt$ transforme une fonction f de variable t en une fonction F de variable s. Nous nous intéressons tout particulièrement ici à une transformée de intégrale où l'intervalle d'intégration est l'intervalle non borné $[0, +\infty)$.
Si $f : t \mapsto f(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ alors l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} K(s, t)f(t)dt$ est définie par
$\int_0^{+\infty} K(s, t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_b^{+\infty} K(s, t)f(t)dt.$
Si la limite existe on dit que l'intégrale est convergente. Sinon elle diverge. Si $K(s, t) = e^{-st}$ nous obtenons la TRANSFORMEE DE LAPLACE.

5.2 Définition de la transformée de Laplace

Définition 29 *Soit f une fonction définie pour $t \geq 0$. Alors l'intégrale*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \tag{5.1}$$

est appelée transformée de Laplace de f sous la condition qu'elle converge. Si elle converge le résultat est une fonction de s.

Notation : On notera $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$,$Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, etc...

$\mathscr{L}$ est une transformée linéaire, *i.e.* pour tout f, g tels que $\mathscr{L}\{f\}$ et $\mathscr{L}\{g\}$ existent.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

TRANSFORMEES DE QUELQUES FONCTIONS BASIQUES :

$$\begin{aligned}
a.\quad & \mathscr{L}\{1\} &&= \frac{1}{s} \\
b.\quad & \mathscr{L}\{t^n\} &&= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, ... \\
c.\quad & \mathscr{L}\{e^{at}\} &&= \frac{1}{s-a} \\
d.\quad & \mathscr{L}\{\sin(kt)\} &&= \frac{k}{s^2+k^2} \\
e.\quad & \mathscr{L}\{\cos(kt)\} &&= \frac{s}{s^2+k^2} \\
f.\quad & \mathscr{L}\{\sinh(kt)\} &&= \frac{k}{s^2-k^2} \\
g.\quad & \mathscr{L}\{\cosh(kt)\} &&= \frac{s}{s^2-k^2}
\end{aligned}$$

Condition suffisante d'existence de $\mathscr{L}\{f(t)\}$

Rappelons qu'une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ si pour chaque intervalle $0 \leq a \leq t \leq b$, il existe un nombre fini de points t_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(t_{k-1} \leq t_k)$ sur lesquels f possède des discontinuités et qui est continue sur chaque intervalle ouvert $t_{k-1} < t < t_k$.

Définition 30 *Une fonction est d'ordre exponentiel c s'il existe des constantes c, $M > 0$ et $T > 0$ telles que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, pour tout $t > T$.*

Théorème 26 ***Condition suffisante d'existence***
Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ est d'ordre exponentiel c pour $t > T$ alors $\mathscr{L}f(t)$ existe pour $s > c$. Attention, ces conditions ne sont pas nécessaires !

5.3 Transformée inverse et transformée de dérivées

5.3.1 Transformée inverse

Définition 31 ***Transformée inverse*** *Si $F(s)$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f, i.e. $\mathscr{L}f(t) = F(s)$ alors $f(t)$ la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ et nous notons $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.*

Quelques transformées inverses

$$\begin{array}{lll} a. & 1 & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} \\ b. & t^n & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}, \quad n = 1, 2, 3, ... \\ c. & e^{at} & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} \\ d. & \sin(kt) & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\} \\ e. & \cos(kt) & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\} \\ f. & \sinh(kt) & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2-k^2}\} \\ g. & \cosh(kt) & = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-k^2}\} \end{array}$$

N.B. : $\mathscr{L}^{-1}$ est un transformée linéaire, *i.e.* pour tout α, β constantes, $\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$, où F et G sont des transformées des fonctions f et g.

5.3.2 Transformer une dérivée

Le but de ce chapitre est d'utiliser les transformées de Laplace pour la résolution d'équations différentielles. Suppososons que f' soit continue pour tout $t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathscr{L}f'(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt \\ &= [e^{-st}f(t)]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

donc $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$. De même, $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, et $\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$,

Théorème 27 ***Transformée de dérivée*** *Si f, f', ..., f^{n-1} sont continues sur $[0, +\infty)$ et sont d'ordre exponentiels et si $f^{(n)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ alors $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$ où $F(s) = \mathscr{L}f(t)$.*

5.4 Résoudre les équations différentielles linéaires

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = g(t), \\ \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y, ... \quad y^{(n-1)} = y_{n-1}, \end{cases} \tag{5.2}$$

où les a_i et les y_i, $i = 0, ..., n$ sont constantes. Par la propriété de linéarité, la transformée de Laplace de cette combinaison linéaire est une combinaison linéaire de transformée de Laplace :

$$a_n \mathscr{L}\{y^{(n)}\} + a_{n-1}\mathscr{L}\{y^{(n-1)}\} + ... + a_0 \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \tag{5.3}$$

Le système (5.2) devient alors

$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - ... - y^{(n-2)}(0)] + a_0 Y(s) = G(s), \tag{5.4}$$

où $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ et $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ l'équation linéaire devient alors une équation algébrique en $Y(s)$. On résout alors l'équation transformée (5.4) pour $Y(s)$, $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$, on écrit $Y(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)} + \dfrac{G(s)}{P(s)}$ où $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0$, $Q(s)$ est un polynôme de degré $\leq n - 1$ et $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$. Enfin on résout $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Théorème 28 ***Comportement de*** $F(s)$ ***quand*** $s \to +\infty$ *Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ et d'ordre exponentiel pour $t > T$ alors $\lim_{s\to+\infty} \mathscr{L}\{f(t)\} = 0$.*

Ce résultat permet de savoir quand on n'a pas de transformée de Laplace de fonctions continues par morceaux. Mais cela ne veut pas dire que ces fonctions n'ont pas de transformée de Laplace. Elles sont juste d'un autre type.

Remarque 15 *La transformée de Laplace inverse peut ne pas être unique, i.e. $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ avec $f_1 \neq f_2$. Mais si $f_1 \neq f_2$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty)$ et d'ordre exponentiel alors f_1 et f_2 sont dites "essentiellement" les mêmes, et si elles sont continues, on dit que ce sont les mêmes.*

5.5 Théorème de translation

Il n'est pas pratique d'utiliser la transformée de Laplace (sa définition) chaque fois que nous souhaitons trouver la transformée de Laplace d'une fonction f. Dans ce paragraphe, nous présentons des théorèmes qui nous éviterons un travail fastidieux et qui nous permettront de construire une liste plus longue de transformées de Laplace.

5.5.1 Translation sur l'axe des s

Théorème 29 ***Première translation ou premier déplacement*** *Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ et $a \in \mathbb{R}$ alors $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$. On écrit quelques fois $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}|_{s\mapsto s-a}$. Et bien entendu $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)|_{s\mapsto s-a}\} = e^{at}f(t)$.*

5.5.2 Translation sur l'axe des t

Définition 32 ***Fonction de Heaviside*** *La fonction de Heaviside $\mathscr{U}(t-a)$ ($\mathscr{U}$ pour "Unit Step Function") est définie par*

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < a, \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

Théorème 30 ***Deuxième translation ou deuxième déplacement*** *Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ et $a > 0$, alors $\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, et bien entendu $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$. On a aussi $\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}G(t+a)$.*

5.6 Propriétés additionnelles

5.6.1 Multiplier une fonction par t^n

Théorème 31 ***Dérivée des transformées*** *Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1^n)\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$.*

5.6.2 Convolution

Si les fonction f et g sont continues par morceaux sur $[0, +\infty)$, alors un produit "spécial" noté $f * g$ est défini par l'intégrale

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

C'est la convolution de f et g. C'est une fonction de t.

N.B. : $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, autrement dit $f*g = g*f$. Mais ATTENTION, l'intégrale d'un produit n'est pas égal au produit des intégrales ! ! ! Par contre, la transformée de Laplace d'un produit "spécial" est le produit des transformées de Laplace. Ce qui est intéressant ici est donc de trouver la transformée de Laplace d'un produit de convolution sans calculer l'intégrale de Laplace.

Théorème 32 ***Théorème de convolution*** *Si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur $[0, +\infty)$ et d'ordre exponentiel, alors $\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$.*

5.6.3 Transformée d'une intégrale

Quand $g(t) = 1$ et $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = \dfrac{1}{s}$, alors $\mathscr{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \dfrac{F(s)}{s}$ et donc $\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{F(s)}{s}\}$

5.6.4 Equation intégrale de Volterra

Le théorème de convolution et le résultat de l'intégrale d'une transformée sont utiles pour résoudre des équations dans lesquelles la fonction inconnue apparaît sous le signe $\int$.

Equation intégrale de Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

où g et h sont connues.

Voir TD pour un exemple de résolution d'une telle équation.

5.6.5 Transformée de fonction périodique

Si f est périodique de période T, $T > 0$, $f(t+T) = f(t)$.

Théorème 33 *Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ d'ordre exponentiel et T-périodique, alors,*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

5.6.6 Fonction δ-Dirac

Les systèmes mécaniques sont souvent soumis à des forces externes de large magnitude sur une période très brève (une aile d'avion qui vibre frappée par un éclair, une masse sur un ressort (flipper), une balle (golf, tennis, base-ball etc...).

Impulsion :

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 - a, \\ \frac{1}{2a} & t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \\ 0 & t \geq t_0 + a, \end{cases}$$

où $a > 0$ et $t_0 > 0$. Quand $a \to 0$, $\delta_a(t-t_0)$ tend vers la fonction δ-Dirac.
Fonction δ-Dirac : quelques propriétés :
i. $\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0)$
ii. $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & sit = t_0 \\ 0 & sit \neq t_0 \end{cases}$
iii. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-t_0)dt = 1$

Théorème 34 ***Théorème de transformée de Laplace d'une fonction δ-Dirac*** *Pour $t_0 > 0$ $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$, et si $t_0 = 0$, $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$.*

Chapitre 6

Systèmes différentiels linéaires

6.1 Théorie préliminaire

La forme normale d'un système d'équations linéaires du premier ordre est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots & & \\ x'n & = & a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{array}\right.$$

Nous supposons que les fonctions a_{ij}, et f_i sont continues sur I pour tout $i, j = 1, 2, 3, ..., n$. Quand $f_i(t) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, ..., n$, on dit que le système linéaire est homogène. La forme matricielle du système linéaire est donnée de la façon suivante. Notons

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$ Alors, le système (6.1) devient $X' = AX + F$. Le système homogène quant à lui est $X' = AX$. Un vecteur solution sur un intervalle I est un vecteur X.

Problème aux conditions initiales : Soit t_0 un point sur un intervalle I et $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$

et $X_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) \\ \gamma_2(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_0) \end{pmatrix}$

où γ_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont des constantes données. Alors le problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & A(t)X + F(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

est un problème aux conditions initiales sur I.

Théorème 35 ***Existence d'une solution unique*** *Soit A une matrice dont les coefficients sont continus sur I, soit F un vecteur dont les coefficients sont continus sur I (I intervalle qui contient le point t_0). Alors il existe une unique solution au problème (6.1) sur I.*

6.1.1 Systèmes homogènes

Principe de superposition

Théorème 36 ***Principe de superposition*** *Soit X_1, X_2,..., X_k un ensemble de vecteurs solutions du système homogène*

$$X' = AX \tag{6.2}$$

sur un intervalle I. Alors la combinaison linéaire $X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k$ où les c_i, $i = 1, ..., k$ sont des constantes arbitraires est aussi une solution sur I.

Dépendance / Indépendance linéaire

Définition 33 *Soit X_1, X_2, ..., X_k un ensemble de solutions du système homogène (6.2) sur un intervalle I. Nous disons que l'ensemble est linéairement indépendant sur I s'il existe des constantes c_1, c_2, ..., c_k non toutes nulles telles que $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k \neq 0$ pour tout $t \in I$.*

Théorème 37 ***Critère pour vérifier que des solutions sont linéairement indépendantes*** *Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$ $...X_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ n solutions du système homogène (6.2) sur un intervalle I. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est linéairement indépendant sur I si et seulement si le Wronskien*

$$W(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

pour tout $t \in I$.

Définition 34 ***Ensemble fondamental de solutions*** *Un ensemble X_1, X_2, ..., X_n de n vecteurs solutions linéairement indépendants du système homogène (6.2) sur un intervalle I st appelé ensemble fondamental des solutions.*

Théorème 38 ***Existence*** *Si les a_{ij} et f_i sont continues, alors il existe un ensemble de solutions pour le système homogène (6.2) sur I.*

Théorème 39 ***Solution générale-systèmes homogènes*** *Soit X_1, X_2, ..., X_n un ensemble fondamental de solutions du système homogène (6.2) sur un intervalle I. Alors la solution générale du système sur l'intervalle est $X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$, où c_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont des constantes arbitraires.*

6.1.2 Systèmes non-homogènes

Théorème 40 ***Solution générale - Systèmes non homogènes*** *Soit X_p une solution donnée du système non homogène (6.1) sur un intervalle I et soit $X_c = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$. La solution générale sur le même intervalle du système homogène associé (6.2). Alors la solution générale du système non-homogène sur cet intervalle est $X = X_c + X_p$. La solution générale X_c du système homogène (6.2) est appelée fonction complémentaire du système non-homogène (6.1).*

6.2 Systèmes linéaires homogènes avec des coefficients constants

6.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Si nous cherchons des vecteurs de la forme $X = ke^{\lambda t}$, λ =constante$\in \mathbb{C}$, où X et k sont des vecteurs, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, k_i =constantes, $i = 1, 2, ..., n$ où les X sont solutions de l'équation $X' = AX$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ à coefficients constants. Alors $X' = K\lambda e^{\lambda t}$ et donc $X' = AX$ devient $K\lambda e^{\lambda t} = AK\lambda e^{\lambda t}$ comme $e^{\lambda t} > 0$ nous obtenons $AK = \lambda K$ soit encore $AK - \lambda K = 0$ et comme $K = IK$, alors on a

$$(A - \lambda I)K = 0 \tag{6.3}$$

Pour trouver une solution non triviale $X \neq 0$, nous devons avoir $K \neq 0$, autrement dit nous devons résoudre $det(A - \lambda I) = 0$. C'est ce que nous appelons l'équation caractéristique de la matrice A. Ses solutions sont les vecteurs propres de A. Une solution $K \neq 0$ de (6.3) correspondant à la valeur propre λ est appelée vecteur propre de A. Une solution de (6.2) est alors $X = Ke^{\lambda t}$.

Valeurs propres réelles distinctes

Quand une matrice $n \times n$, A possède n valeurs propres réelles λ_1, λ_2,...,λ_n alors l'ensemble des vecteurs propres indépendants K_1, K_2, ..., K_n existe et $X_1 = K_1e^{\lambda_1 t}$, $X_2 = K_2e^{\lambda_2 t}$,...,$X_n = K_ne^{\lambda_n t}$ est un ensemble fondamental de solutions de (6.2) sur $(-\infty, +\infty)$.

Théorème 41 ***Solution générale-systèmes homogènes*** *Soient λ_1, λ_2,...,λ_n, n valeurs propres distinctes réelles de la matrice A du système homogène (6.2) et soient K_1, K_2, ..., K_n les vecteurs propres correspondants. Alors la solution générale de (6.2) sur $(-\infty, +\infty)$ est donnée par $X = c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_2 t} + ... + c_nK_ne^{\lambda_n t}$.*

Valeurs propres répétées

Si m est un entier strictement positif et $(\lambda - \lambda_1)^m$ est un facteur de l'équation caractéristique mais pas $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ alors λ_1 est une valeur propre d'ordre de multiplicité m. i. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,n}$, il peut être possible de trouver m vecteurs propres linéairement indépendants K_1, K_2, ..., K_n correspondant à la valeur propre λ_1 de multiplicité $m \leq n$. Dans ce cas, le système contient la

combinaison linéaire $c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_1 t} + ... + c_nK_ne^{\lambda_1 t}$.
ii. S'il existe seulement un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_1 de multiplicité m alors on peut toujours trouver m solutions linéairement indépendantes de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= k_{11}e^{\lambda_1 t} \\ x_2 &= k_{21}te^{\lambda_1 t} + k_{22}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \\ x_m &= k_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + k_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + ... + k_{mm}e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

où les k_{ij} sont des vecteurs.

N.B. : Si A est symétrique (*i.e.* $A^T = A$) ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) alors il existe toujours des vecteurs propres K_1, K_2, ..., K_n linéairement indépendants.

Valeurs propres complexes

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et$\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta > 0$) sont des valeurs propres de la matrice A alors nous avons le résultat suivant

Théorème 42 ***Solution correspondant à une valeur propre complexe*** *Soit A une matrice à coefficients réels correspondant à l'équation (6.2) et soit K_1 un vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ où α et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors $K_1e^{\lambda_1 t}$ et $\overline{K_1}e^{\overline{\lambda_1} t}$ sont solutions de (6.2) et deux vecteurs solutions peuvent s'écrire $K_1e^{\lambda_1 t} = K_1e^{\alpha t}e^{i\beta t} = K_1e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$*
$\overline{K_1}e^{\overline{\lambda_1}}t = \overline{K_1}e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = \overline{K_1}e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$

Par le principe de superposition, les vecteurs suivants sont également solutions $X_1 = \frac{1}{2}(K_1e^{\alpha t} + \overline{K_1}e^{\overline{\lambda_1} t}) = \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}e^{\alpha t})\cos(\beta t) - \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}e^{\alpha t})\sin(\beta t$
$X_2 = \frac{i}{2}(-K_1e^{\alpha t} + \overline{K_1}e^{\overline{\lambda_1} t}) = \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}e^{\alpha t})\cos(\beta t) - \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}e^{\alpha t})\sin(\beta t)$

Rappel : Si $z = a + ib$ alors $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = a$ et $\frac{i}{2}(-z + \overline{z}) = b$ sont réels, donc

$$B_1 = \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}) \;\text{ et }\; B_2 = \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}) \tag{6.4}$$

sont réels.

Théorème 43 ***Solutions réelles correspondant à une valeur propre complexe*** *Soit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ une valeur propre complexe de la matrice A correspondant à l'équation (6.2) et soient B_1 et B_2 les vecteurs définis par (6.4). Alors*

$$X_1 = [B_1\cos(\beta t) - B_2\sin(\beta t)]e^{\alpha t} X_2 = [B_2\cos(\beta t) + B_1\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$$

sont des solutions linéairement indépendantes de (6.2) sur $(-\infty, +\infty)$.

Remarque : Les vecteurs B_1, et B_2 définis par (6.4) sont souvent notés $B_1 = \mathscr{R}(K_1)$ et $B_2 = \mathscr{I}(K_1)$.

Remarque : Dans ce paragraphe nous avons étudié les systèmes homogènes d'ordre 1 d'équations linéaires sous la forme normale $X' = AX$. Mais la plupart du temps, les modèles mathématiques des systèmes physiques dynamiques sont des systèmes homogènes d'ordre 2, autrement dit de la forme $X'' = Ax$. Exemple des ressorts couplés (à voir).

6.3 Variation de la constante

6.3.1 Matrice fondamentale

Si X_1, X_2, X_3,..., X_n est un ensemble fondamental du système homogène $X' = AX$ sur un intervalle I, alors sa solution générale sur I est $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ ou encore

$$X = c_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + ... + c_n \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_{11} & +c_2 x_{12} & +... & +c_n x_{1n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} & +c_2 x_{n2} & +... & +c_n x_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

On remarque que (6.5) peut être représentée par le produit $X = \phi(t)C$ où C est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $\phi(t) \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ correspond aux solutions du système, autrement dit $\phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & +x_{12} & +... & +x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n1} & +x_{n2} & +... & +x_{nn} \end{pmatrix}$. Cette matrice est appelée matrice fondamentale du système sur l'intervalle I.

6.3.2 Résultats

i. Une matrice fondamentale $\phi(t)$ est non singulière.
ii. Si $\phi(t)$ est une matrice fondamentale du système $X' = AX$ alors $\phi'(t) = A\phi(t)$.
iii. $\phi(t) = W(X_1, X_2, ..., X_n)$ (Wronskien). iv. L'indépendance linéaire des colonnes de $\phi(t)$ sur I garantit que $det\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ v. Puisque $\phi(t)$ est non singulière, alors $\phi^{-1}(t)$ existe pour tout $t \in I$.

6.3.3 Variation de la constante

Question : peut-on remplacer le vecteur C par le vecteur $U(t)$ tel que $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ de telle sorte que

$$X_p = \phi(t)U(t) \tag{6.6}$$

soit une solution particulière du système non homogène

$$X' = AX + F(t)\,? \tag{6.7}$$

Si oui, alors

$$X'_p = \phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) \tag{6.8}$$

ATTENTION, l'ordre est important puisqu'on travaille avec des vecteurs et des matrices maintenant ! D'après (6.6) ,(6.7) ,(6.8), nous obtenons $\phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t)$, or comme $\phi(t)' = A\phi(t)$, il vient $\phi(t)U'(t) + A\phi(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t)$ soit encore $\phi(t)U'(t) = F(t)$ et donc $U(t) = \displaystyle\int \phi^{-1}(t)F(t)dt$. Donc en prenant $X_p = \phi(t)U(t)$ alors $X_p = \phi(t)\displaystyle\int \phi^{-1}(t)F(t)dt$, et donc la solution générale de (6.7) est $X = X_c + X_p$ ou encore $X = \phi(t)C + \phi(t)\displaystyle\int \phi^{-1}(t)F(t)dt$. Avec le problème aux conditions initiales $X = \phi(t)C + \phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(t)F(t)dt$ où $t, t_0 \in I$. Si la condition initiale est $X(t_0) = X_0$ alors $C = \phi^{-1}(t_0)X_0$ $X(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)X_0 + \phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s)ds$.

6.4 Exponentielle d'une matrice

6.4.1 Systèmes homogènes

Nous rappelons que si $x' = ax$ où a =constante, la solution générale est $x = ce^{at}$. Il semble donc naturel de définir e^{at} qui pourrait être solution de $X' = AX$. Nous allons définir une exponentielle d'une matrice e^{At} telle que

$$X = e^{At}C \tag{6.9}$$

est une solution du système homogène $X' = AX$. Ici $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (vecteur colonne) composée de constantes arbitraires. Noter que dand (6.9), C est multiplié à droite car e^{At} est une matrice $n \times n$. Nous rappelons que $e^{At} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + ... + a^k\frac{t^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{infty} a^k\frac{t^k}{k!}$. La série converge pour tout t. Basé sur ce résultat nous définissons l'exponentielle de matrice.

Définition 35 *Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n\times n}$,*

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^k\frac{t^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{infty} A^k\frac{t^k}{k!}. \tag{6.10}$$

On peut montrer que (6.10) converge vers une matrice $n\times n$ pour tout t. De même $A^2 = A\times A$, $A^3 = A(A^2)$, etc.

Dérivée de e^{At}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^k\frac{t^k}{k!} + ...] \\ &= A + A^t + A^3\frac{t^2}{2!} + ... \\ &= A[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ...] \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors dire que $X = e^{At}C$ est une solution de $X' = AX$ pour tout vecteur C composé de constantes $X' = \dfrac{d}{dt}e^{At}C = Ae^{At}C = A(e^{At}C) = AX$. e^{At} est une matrice fondamentale : en effet, si nous notons $\psi(t) = e^{At}$ alors $\dfrac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ est équivalent à $\psi'(t) = A\psi(t)$. De plus, $\psi(0) = e^{A_0} = I$ et donc $\psi(0) \neq 0$. $\psi(t)$ est une matrice fondamentale du système $X' = AX$.

6.4.2 Systèmes non homogènes

Nous avons vu que les solutions de $x' = ax + f(t)$ sont de la forme $x = x_c + x_p = e^{At}C + e^{At}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds$

N.B. : e^{At} est non singulère donc $e^{-As} = (e^{-As})^{-1}$ (en général, on fait le changement $t \to -s$.

6.4.3 Utilisation de la transformée de Laplace

$x = e^{At}$ est solution de $X' = AX$, comme $e^{A_0} = I,\ X = e^{At}$ implique que $X = e^{At}$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & AX, \\ X(0) & = & I. \end{array}\right.$$

Si $\mathcal{X}(s) = \mathscr{L}\{X(t)\} = \mathscr{L}\{e^{At}\}$ alors $s\mathcal{X}(s) - \mathcal{X}(0) = A\mathcal{X}(s)$ où $(sI - A)\mathcal{X}(s) = I$ et donc $\mathcal{X}(s) = (sI - A)^{-1}I = (sI - A)^{-1}$. Autrement dit $\mathscr{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$ ou $e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

Deuxième partie

Equations aux dérivées partielles

Chapitre 7

Equation de la chaleur

7.1 Introduction

Dans cette section nous allons présenter l'élaboration des équations du flot de chaleur décrivant le transfert d'énergie thermique. L'énergie de la chaleur est causée par l'agitation de molécules. Deux processus prennent place dans le déplacement d'énergie thermique : la CONDUCTION et la CONVECTION.

CONDUCTION : résulte des collisions des molécules voisines dans lesquelles l'énergie cinétique des vibrations d'une molécule est transférée à ses voisines. C'est le mode de transfert dans un milieu matériel.
CONVECTION : C'est le mode de transfert entre un solide et un fluide. Il comprend des phénomènes de conduction auxquels se superpose un transport de matière. Les molécules du fluide viennent se réchauffer ou se refroidir au contact du solide.

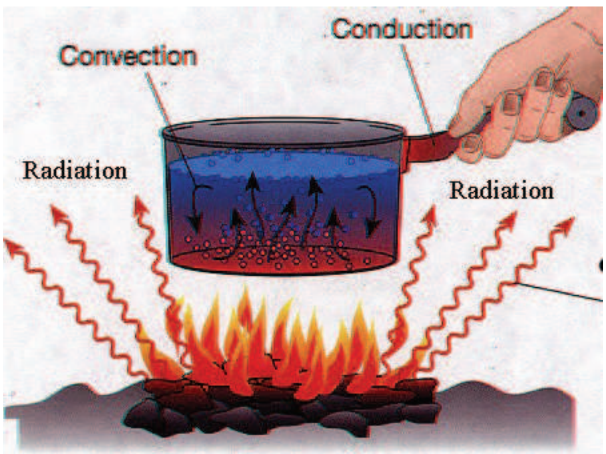


FIGURE 7.1 – Illustration de la différence entre conduction et convection.

Dans ce qui suit nous considérerons la conduction plus significative que la convection.

7.2 Construction du modèle de la chaleur dans une time (1D)

7.2.1 Densité de l'énergie thermique

Considérons une tige de section constante dont l'aire est A orientée dans la direction des x (de $x = 0$ vers $x = L$).

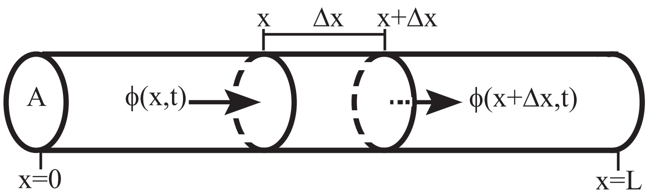


FIGURE 7.2 – Conduction de chaleur dans une tige.

Soit $e(x,t) =$densité thermique (énergie thermique par unité de volume).

Nous supposons que la surface de la tige est isolée (aucune énergie thermique n'est transférée à la surface). Le fait que e dépende de x et de t signifie que la tige n'est pas chauffée uniformément.

7.2.2 Energie de la chaleur

Considérons une "tranche" de la tige de longueur Δx, alors on la définition suivante.

Définition 36 *L'énergie de la chaleur est égale à*

$$Energiedechaleur = e(x,t)A\Delta.$$

En supposant que Δx est suffisamment petit pour avoir $e(x,t)$ sur "la petite tranche".

7.2.3 Conservation de l'énergie de la chaleur

Le taux de changement de l'énergie de la chaleur en temps est égal à l'énergie de la chaleur transférée aux bords par unité de temps ajoutée à l'énergie générée à l'intérieur par unité de temps. On rappelle que l'on note le taux de changement (variation) de l'énergie de chaleur en temps est donné par la formule

$$\frac{\partial}{\partial t}(e(x,t)A\Delta x).$$

Il nous reste alors à exprimer le flux de chaleur transférée aux bords par unité de temps ainsi que l'énergie générée par l'intérieur du système. C'est l'objet des deux paragraphes suivants.

Flux de chaleur

Notons $\phi(x,t)$ le flux de chaleur (autrement dit, la quantité d'énergie thermique (flot) par unité de temps et par unité d'espace). En général, ϕ s'écoule dans le sens des x (vers la droite dans notre schéma). Et donc, si $\phi(x,t) < 0$ l'énergie de chaleur s'écoule vers la gauche. Par conséquent l'énergie de la chaleur s'écoulant au travers des bornes de la "tranche" est

$$\phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x, t)A.$$

Source interne d'énergie

Notons $Q(x,t)$ l'énergie de la chaleur par unité de volume générée par unité de temps. L'énergie totale générée dans la "tranche" par unité de temps est alors $Q(x,t)A\Delta x$.

IL EST DONC POSSIBLE maintenant de donner de façon intuitive l'équation suggérée au début de cette section.

$$\frac{\partial}{\partial t}(e(x,t)A\Delta x) \approx \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x.$$

Et quand $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}e = \lim_{\Delta x \to} \frac{\phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta} + Q(x,t),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial t}e = -\frac{\partial}{\partial t}\phi + Q. \tag{7.1}$$

Pour élaborer l'équation précédente de façon moins "intuitive" et plus rigoureuse, nous proposons la démonstration suivante. Au lieu de considérer la tranche "$x - x + \Delta x$" nous considérons une tranche "$a - b$" quelconque. Nous obtenons alors l'équation de conservation de la chaleur sur la tranche quelconque "$a - b$"

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b Q dx,$$

pour $x \in [a,b]$. Si e est continue, a et b sont constantes, alors

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} e dx,$$

et en remarquant que

$$-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\phi dx = \phi(a,t) - \phi(b,t),$$

(en supposant que ϕ est continûment différentiable). Alors

$$\int_a^b (\frac{\partial}{\partial t}e - \frac{\partial}{\partial x}\phi - Q) dx = 0.$$

Par conséquent, si $\frac{\partial}{\partial t}e - \frac{\partial}{\partial x}\phi - Q$ est continue sur $[a,b]$ alors,

$$\frac{\partial}{\partial t}e = -\frac{\partial}{\partial t}\phi + Q,$$

d'où l'équation (7.1).

7.2.4 Température et chaleur spécifique

Notons $u(x,t)$ la température et c la chaleur spécifique (c'est à dire l'énergie de chaleur nécessaire à une unité de masse pour augmenter sa température d'une unité). Par exemple, l'énergie nécessaire pour augmenter une substance de 0° à 1° peut être la même que pour passer de 85° à 86°.
D'habitude, $c = c(x)$ autrement dit, elle dépend du matériau traversé. Mais ici, pour des questions de simplicité nous considérerons c indépendante de x.

7.2.5 Energie thermique

On le sait, elle est égale à $e(x,t)A\Delta x$, mais c'est aussi l'énergie nécessaire pour passer de 0° à la la température $u(x,t)$ voulue au temps t pour une masse donnée.
Ici, $c(x)u(x,t)$ représente la chaleur par unité de masse.
On introduit la densité de masse (masse par unité de volume) que l'on note $\rho(x)$ dépendant du matériau.
La masse totale est donc $c(x)u(x,t)\rho A\Delta x$. Par conséquent

$$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\rho A\Delta x.$$

Donc, la relation entre l'énergie thermique et la température est

$$e(x,t) = c(x)\rho(x)u(x,t). \tag{7.2}$$

Et d'après l'équation (7.1) de la conservation d'énergie thermique devient

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} + Q. \tag{7.3}$$

7.2.6 Loi de Fourier

Rappel :

1. Si une température est constante dans une région, il n'y a aucun transfert d'énergie.
2. S'il y a des températures différentes, l'énergie de la chaleur s'écoule de la région la plus chaude vers la région la plus froide.
3. Plus la différence de température est grande, plus le flot d'énergie de chaleur est important.
4. Le flot d'énergie de chaleur varie suivant les différents matériaux.

Fourier (1768-1830) a résumé ces quatre propriétés en une seule, que l'on appelle la Loi de Fourier de conduction de la chaleur

$$blabla \tag{7.4}$$