Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
19 décembre 2012

Exercice 1. (approximation de nombres algébriques)

Soit x un nombre réel irrationnel algébrique, c'est-à-dire une racine d'un polynôme $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$ de degré n, à coefficients entiers et que l'on peut supposer sans racine rationnelle. Le but de l'exercice est de montrer que le réel x est « mal approché » par les rationnels et d'utiliser ce critère pour donner un exemple explicite de nombre transcendant.

1. *Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel (p et q entiers) de l'intervalle $[x-1;x+1]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\phi : t \mapsto P\left(\frac{p}{q}\right) - P(t)$, démontrer que*
$$\left|x-\tfrac{p}{q}\right| \geqslant C\left|P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| \qquad \textit{avec} \quad C = \left(\sup_{[x-1;x+1]} |P'(t)|\right)^{-1}$$
2. *En déduire, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q entiers, $q \geqslant 1$) de l'intervalle $[x-1;x+1]$, l'inégalité*
$$\left|x-\tfrac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^n}.$$
3. *Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{10^{n!}}$ définit un nombre transcendant. (Ce nombre est appelé* constante de Liouville*).*

Exercice 2. (matrices et homographies)

Une homographie est une application définie par $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a,b,c,d appartenant à un corps $\mathbf{K}$ (supposé ici être $\mathbf{R}$) et $ad-bc \neq 0$.

1. *On prolonge l'application $h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ à l'ensemble $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ en posant $h(\infty) = \frac{a}{c}$ ($\frac{a}{c} = \infty$ si $c = 0$) et $h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ ($-\frac{d}{c} = \infty$ si $c = 0$).*
Vérifier qu'une homographie définit alors une bijection de $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ sur lui-même.
2. *Justifier que, si h est une homographie, il existe a,b,c,d réels tels que $h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ et $ad-bc = \pm 1$.*
3. *On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies et G l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{M}(2,\mathbf{R})$ dont le déterminant est ± 1. Justifier que l'application*
$$G \longrightarrow \mathcal{H}\ ;\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \longmapsto h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$
définit un morphisme de groupes (pour le produit matriciel et la composition des homographies) qui est surjectif. Préciser son noyau.
4. *On obtient ainsi une action du groupe G sur l'ensemble $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$.*
   (a) *Déterminer l'orbite et le stabilisateur du point ∞, du point 0.*
   (b) *Le sous-groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ de G agit également sur l'ensemble $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$. Montrer que l'orbite par Γ de 0 est $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$.*
5. *Soit g une homographie représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ appartenant à G.*
Montrer, pour tous réels x et y vérifiant $cx+d\neq 0$ et $cy+d \neq 0$, l'égalité
$$|g(x)-g(y)| = \frac{|x-y|}{|cx+d|.|cy+d|}.$$

Exercice 3. **(développement en fraction continue)**

À tout réel x, on associe les suites $(x_k)_k$ et $(n_k)_k$ (finies ou infinies) définies par les relations :

$$x_0 = x \quad ; \quad n_k = E(x_k) \quad ; \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - n_k}$$

où $E(.)$ désigne la partie entière.

1. *Déterminer les suites associées aux réels $\frac{47}{7}$, $\sqrt{2}$ et $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
2. *On démontre dans cette question que les suites $(x_k)_k$ et $(n_k)_k$ sont infinies si et seulement si x est irrationnel.*
   (a) *Vérifier l'équivalence $x_k \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z} \Longleftrightarrow x_{k+1} \in \mathbf{Q}$.*
   (b) *On suppose ici que $x = x_0$ est rationnel. Ainsi chaque terme de la suite $(x_k)_k$ peut s'écrire de manière unique sous forme irréductible $x_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec q_k entier naturel non nul.*
   Montrer que, si les termes x_k et x_{k+1} existent, alors $q_{k+1} < q_k$.
   (c) *Démontrer l'équivalence annoncée.*

Exercice 4. **(convergence des fractions continues)**

Soit x un nombre irrationnel et $(x_k)_k$ et $(n_k)_k$ les suites (infinies et indexées sur $\mathbf{N}$) définies dans l'exercice précédent.
On définit les suites $(p_k)_k$ et $(q_k)_k$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} p_{-1} = 0 \\ p_0 = n_0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} q_{-1} = 0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} p_{k+1} = n_{k+1}p_k + p_{k-1} \\ q_{k+1} = n_{k+1}q_k + q_{k-1} \end{cases}$$

On considère les homographies $\tau : x \mapsto x+1$ et $\sigma : x \mapsto \frac{1}{x}$ et on note, si n est un entier naturel, $h_n = \tau^n \sigma$.
Enfin, on note g_k l'homographie $g_k = h_{n_0} h_{n_1} \dots h_{n_k}$.

1. *Pour chacune des homographies σ, τ et h_n, indiquer une matrice appartenant au groupe G (*exercice 2*) qui la représente.*
   En déduire que, pour tout entier naturel k, g_k est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}$.
2. *Montrer, pour tout entier naturel k, les égalités*
$$x_k = h_{n_k}(x_{k+1}) \qquad ; \qquad x = g_k(x_{k+1}).$$
3. *En utilisant l'homographie $g_k \sigma$ et l'*exercice 2 *5., démontrer que, pour tout entier naturel k :*
$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \textit{puis que} \quad \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$$
   En déduire que la suite $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_k$ de nombres rationnels (les « réduites » de x) converge vers x.
4. *En notant $[n_0, n_1, \dots, n_k]$ le nombre $\frac{p_k}{q_k}$, on peut ainsi écrire*
$$x = \lim_{k \to +\infty} [n_0, n_1, \dots, n_k] = [n_0, n_1, \dots, n_k, \dots].$$
   (a) *Que valent $\tau(x)$, $\sigma(x)$, $h_n(x)$?*
   (b) *On note T l'application définie sur $I =]0;1]$ par $T(x) = \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$.*
   Vérifier que $T([0, n_1, \dots, n_k, \dots]) = [0, n_2, \dots, n_k, \dots]$ et déterminer l'ensemble des points fixes de T.