

# Mathématiques financières en classe de première S ou terminale S

Groupe IREM-INRP-UPO Lyon

mai 2008

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Fiche Résumé</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fiche professeur</b>	<b>2</b>
2.1	Analyse mathématique . . . . .	2
2.2	Niveau du TP . . . . .	2
2.3	Objectifs . . . . .	3
2.3.1	mathématiques . . . . .	3
2.3.2	instrumentaux . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Fiche Elève</b>	<b>4</b>

## 1 Fiche Résumé

- Remboursements
- Classe de première S
- Suites récurrentes, somme des termes d'une suite arithmétique
- Un TP d'une séance en salle informatique prolongé par un devoir maison ou une narration de recherche

## 2 Fiche professeur

### 2.1 Analyse mathématique

Ce TP s'inspire d'un énoncé d'exercice du manuel Belin 1<sup>ère</sup>S. Il s'agit d'étudier un remboursement dont le montant diminue régulièrement sur un temps donné. On note  $S$  le montant emprunté,  $d$  la diminution et  $a$  la traite initiale. La durée est de 24 mois.

Il s'agit de trouver  $a$  et  $d$  de telle sorte que le remboursement soit complet au terme des 24 mois, c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{23} a + kd = S$$
$$12(2a - 23d) = S$$
$$2a - 23d = S' \text{ avec } S' = \frac{S}{12}$$

Si on essaye de résoudre le problème dans l'ensemble des entiers, on est ramené à la résolution d'une équation de type  $ax + by = c$  avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux.

D'une façon générale, on a ici  $a = 12S' + 23k$  et  $d = 2k + S'$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Mais on doit aussi avoir les deux conditions  $s \geq 0$  et  $a - 23d \geq 0$  ce qui donne comme condition :

$$-\frac{S'}{2} \leq k \leq \frac{-11S'}{23}$$

Le TP amène à conjecturer les valeurs possibles de  $a$  et  $s$ .

Dans l'exemple numérique choisi,  $S' = 2500$  et l'équation  $2a - 23d = 2500$  conduit à  $2a = 2500 + 23d < 2500 + 23 \times \frac{2500}{23}$  et donc  $a < 2500$  et  $d < 108$  ;

comme par ailleurs,  $d$  est pair il y a 54 solutions explorables par le tableur que l'on retrouve avec la solution générale donnée ci-dessus.

En terminale S, spécialité maths, on peut prolonger ce problème avec la résolution de l'équation diophantienne :

$$12ka - 6k(12k - 1)d = S$$

pour une valeur de  $k$  représentant le nombre d'années de remboursement.

On s'éloigne dans ce TP d'un véritable problème de mathématiques financières, le remboursement apparaissant plus comme un habillage du problème sur les suites.

**Illustration** Le fichier tableur OpenOffice prems.ods permet d'illustrer cette situation

### 2.2 Niveau du TP

Ce TP peut être abordé en classe de première S et prolongé en terminale S suivant le niveau d'exigence et les généralisations imaginées.

Le temps d'une séquence de classe doit permettre une première exploration du problème et il peut être prolongé par un devoir à la maison et/ou une narration de recherche.

## **2.3 Objectifs**

### **2.3.1 mathématiques**

Somme des termes d'une suite arithmétique, résolution d'équations diophantiennes (initiation en première, résolution exacte en terminale) ; mise en équation d'un problème.

### **2.3.2 instrumentaux**

Utilisation du tableur pour explorer une situation mathématique.

Eventuellement, généralisation du problème, utilisation du calcul formel pour faire apparaître les conjectures et pour aider à la résolution des équations diophantiennes sous-jacentes.

### 3 Fiche Elève

Une somme  $S$  est remboursée en deux ans par traites mensuelles dégressives : chaque mois le remboursement diminue de  $d$  euros.  $S$ ,  $d$  et la première traite  $a$  sont des entiers dans ce problème. A l'issue des 24 mois, la somme initiale doit être remboursée, autrement dit, la somme de toutes les traites doit être égale à la somme empruntée.

Dans ce TP on choisira  $S = 30000$ .

1.  $d = 50$ . En utilisant le tableur, déterminer le montant de la première traite :  $a$ .
2.  $d = 100$ . En utilisant le tableur, déterminer le montant de la première traite :  $a$ .
3. Peut-on choisir n'importe quelle valeur de  $d$  ?

Deuxième partie

1. Démontrer que  $0 < d \leq 108$  et que  $d$  est pair.
2. Trouver toutes les solutions pour  $S = 30000$

Troisième partie : prolongements

1. Refaire l'étude pour un remboursement sur trois ans, sur  $k$  ans.
2. Refaire l'étude pour d'autres valeurs de  $S$