Sommaire (liens internes au document) :

Dérivation et récurrence

1 Fiche d'identification

– Logiciels : logiciel de calcul formel
– Notions mathématiques : suite arithmétique, suite géométrique, dérivation. Il s'agit de déterminer l'expression de la dérivée n ième d'une fonction, en conjecturant d'abord la formule par "reconnaissance de formes algébriques" sur les affichages d'un logiciel de calcul formel puis de démontrer par récurrence la formule conjecturée. Peu de choix est laissé au départ dans la démarche sur logiciel : il s'agit de dériver. Par contre l'élève devra prendre le temps de reconnaître des formules, des situations algébriques dans les affichages obtenus et revenir éventuellement au logiciel pour tester par quelques calculs supplémentaires ses conjectures.
– Terminale

2 Énoncé

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La dérivée f' de f (lorsqu'elle existe) est aussi notée $f^{(1)}$. On note $f^{(2)}$ la dérivée de f' ($f^{(2)}$ est donc la dérivée de la dérivée de f), $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$, …, $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ …(lorsque ces dérivées existent)

2.1 Une première fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x) \times \sin(x)$$

Entrer en cellule A0 d'une feuille du tableur Xcas : =cos(x)*sin(x)
puis en cellule A1 : =normal(diff(A0,x))
et en cellule A2 : =normal(diff(A1,x,4)) , formule que vous copierez vers le bas.

1. Quelle formule conjecture-t-on par observation de cette feuille de calculs ?
2. Démontrez cette formule.

2.2 Une deuxième fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\exp(x)$$

1. Conjecturer, par observation des résultats sur une feuille de tableur, une expression de $f^{(n)}(x)$.
2. Démontrer cette conjecture.

3 Éléments de réponses

3.1 Une première fonction

	A
0	cos(x)*sin(x)
1	cos(x)^2-sin(x)^2
2	16*cos(x)^2-16*sin(x)^2
3	256*cos(x)^2-256*sin(x)^2
4	4096*cos(x)^2-4096*sin(x)^2
5	65536*cos(x)^2-65536*sin(x)^2
6	1048576*cos(x)^2-1048576*sin(x)^2
7	16777216*cos(x)^2-16777216*sin(x)^2
8	268435456*cos(x)^2-268435456*sin(x)^2
9	4294967296*cos(x)^2-4294967296*sin(x)^2
10	68719476736*cos(x)^2-68719476736*sin(x)^2
11	1099511627776*cos(x)^2-1099511627776*sin(x)^2
12	17592186044416*cos(x)^2-17592186044416*sin(x)^2
13	281474976710656*cos(x)^2-281474976710656*sin(x)^2
14	4503599627370496*cos(x)^2-4503599627370496*sin(x)^2
15	72057594037927936*cos(x)^2-72057594037927936*sin(x)^2
16	1152921504606846976*cos(x)^2-1152921504606846976*sin(x)^2
17	18446744073709551616*cos(x)^2-18446744073709551616*sin(x)^2
18	295147905179352825856*cos(x)^2-295147905179352825856*sin(x)^2
19	4722366482869645213696*cos(x)^2-4722366482869645213696*sin(x)^2
20	75557863725914323419136*cos(x)^2-75557863725914323419136*sin(x)^2

On conjecture la formule suivante :

$$f^{(4n+1)}(x) = 16^n \times \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$$

que l'on démontre par récurrence.

3.2 Une seconde fonction

0	(a*x^2+b*x+c)*exp(x)
1	exp(x)*(a*x^2+2*a*x+x*b+b+c)
2	(a*x^2+4*a*x+2*a+x*b+2*b+c)*exp(x)
3	exp(x)*(a*x^2+6*a*x+6*a+x*b+3*b+c)
4	(a*x^2+8*a*x+12*a+x*b+4*b+c)*exp(x)
5	exp(x)*(a*x^2+10*a*x+20*a+x*b+5*b+c)
6	(a*x^2+12*a*x+30*a+x*b+6*b+c)*exp(x)
7	exp(x)*(a*x^2+14*a*x+42*a+x*b+7*b+c)
8	(a*x^2+16*a*x+56*a+x*b+8*b+c)*exp(x)
9	exp(x)*(a*x^2+18*a*x+72*a+x*b+9*b+c)
10	(a*x^2+20*a*x+90*a+x*b+10*b+c)*exp(x)
11	exp(x)*(a*x^2+22*a*x+110*a+x*b+11*b+c)
12	(a*x^2+24*a*x+132*a+x*b+12*b+c)*exp(x)
13	exp(x)*(a*x^2+26*a*x+156*a+x*b+13*b+c)
14	(a*x^2+28*a*x+182*a+x*b+14*b+c)*exp(x)
15	exp(x)*(a*x^2+30*a*x+210*a+x*b+15*b+c)
16	(a*x^2+32*a*x+240*a+x*b+16*b+c)*exp(x)
17	exp(x)*(a*x^2+34*a*x+272*a+x*b+17*b+c)
18	(a*x^2+36*a*x+306*a+x*b+18*b+c)*exp(x)
19	exp(x)*(a*x^2+38*a*x+342*a+x*b+19*b+c)
20	(a*x^2+40*a*x+380*a+x*b+20*b+c)*exp(x)
21	exp(x)*(a*x^2+42*a*x+420*a+x*b+21*b+c)
22	(a*x^2+44*a*x+462*a+x*b+22*b+c)*exp(x)
23	exp(x)*(a*x^2+46*a*x+506*a+x*b+23*b+c)
24	(a*x^2+48*a*x+552*a+x*b+24*b+c)*exp(x)
25	exp(x)*(a*x^2+50*a*x+600*a+x*b+25*b+c)

4 Évaluation

Quelques copies d'élèves.

Exercice 1 : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$

1. Feuille de tableur développée :

	a
1	$(ax^2+bx+c)\,e^x$
2	$(ax^2+(2a+b)x+b+c)\,e^x$
3	$(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)\,e^x$
4	$(ax^2+(6a+b)x+6a+3b+c)\,e^x$
5	$(ax^2+(8a+b)x+12a+4b+c)\,e^x$
6	$(ax^2+(10a+b)x+20a+5b+c)\,e^x$

Il semblerait que $f^{(n)}(x) = [ax^2+(2na+b)x+(n-1)(n)a+nb+c]e^x$

2. Testons d'abord la résistance de la conjecture :

La conjecture résiste
$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = (ax^2+(2\times 0a+b)x+(0-1)(0)a+0b+c)e^x = (ax^2+bx+c)e^x \\ f^{(1)}(x) = (ax^2+(2\times 1a+b)x+(1-1)(1)a+1b+c)e^x = [ax^2+(2a+b)x+b+c]e^x \\ f^{(2)}(x) = (ax^2+(2\times 2a+b)x+(2-1)(2)a+2b+c)e^x = [ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c]e^x \end{cases}$$

L'expression « résistance de la conjecture » a été utilisée en classe pour habituer les élèves à se poser des questions sur leurs conjectures avant de se lancer dans les démonstrations : l'observation a-t-elle été faite uniquement dans un cas particulier ou des modifications de valeurs de paramètres, de positions de points sur la figure …ont-elles été tentées ? …

On constate sur cette première copie que l'élève a "enregistré" la demande de l'enseignant de tester la résistance des conjectures mais sans comprendre la signification de la demande puisqu'il contrôle cette résistance sur des « cas de figure » (expressions de $f^{(n)}$ pour les premières valeurs de n) qui lui ont a priori déjà servis à établir cette conjecture.

Cela ne nuit en rien apparemment à la qualité de son expérimentation et de ses conjectures, mais on peut mettre en doute, sur d'autres sujets, sa capacité à invalider une conjecture erronée.

Suite de la copie :

Démonstration : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

Amorce : $\begin{cases} f^{(1)} = \left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x \\ f^{(0)} = \left(ax^2+bx+c\right)e^x \\ f'^{(0)} = \left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x \end{cases}$

donc $f^{(1)} = f'^{(0)} = f'^{(1-1)}$

Hérédité : Soit p un entier naturel pour lequel on aurait $f^{(p)} = f'^{(p-1)}$. Aurait-on obligatoirement $f^{(p+1)} = f'^{(p)}$?

$f^{(p+1)} = \left[ax^2+(2(p+1)a+b)x+(p)(p+1)a+(p+1)b+c\right]e^x$

$f^{(p)} = \left[ax^2+(2pa+b)x+(p-1)(p)a+pb+c\right]e^x$

donc $f'^{(p)} = \left[ax^2+(a(2p+2)+b)x+a(p)(p+1)+b(p+1)+c\right]e^x$

$= \left[ax^2+(a\times 2(p+1)+b)x+(p)(p+1)a+(p+1)b+c\right]e^x$

$= \left[ax^2+(2(p+1)a+b)x+(p)(p+1)a+(p+1)b+c\right]e^x$

Conclusion : donc $f^{(p+1)} = f'^{(p)}$. La conjecture faite marche donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la fonction f est bien :

$f^{(n)}(x) = \left[ax^2+(2na+b)x+(n-1)(n)a+nb+c\right]e^x$

La démarche pour cette partie semble globalement bonne. La réponse de l'élève est toutefois rendue difficile à lire par incompréhension des notations introduites.

Pourquoi affirmer a priori $f^{(p+1)}(x) = \left[ax^2+\left(2(p+1)a+b\right)x+p(p+1)b+c\right]\mathrm{e}^x$?

Dans cette rédaction, tout semble se passer comme si $f^{(p+1)}$ était la fonction affichée par la machine et l'élève cherche à vérifier qu'il s'agit de la dérivée de la fonction de la ligne précédente. L'introduction d'une notation (dérivée n ième) au cours d'un exercice de lecture et d'interprétation de résultats machine semble pour cet élève une "difficulté de trop".

Dans la copie suivante, on observe les mêmes problèmes de compréhension des notations. L'élève n'a de plus pas cette fois mené les calculs correctement. En particulier, l'élève n'a pas pensé à utiliser l'outil de calcul formel qu'il était en train de manipuler pour "débloquer" ses essais. On peut donc penser ici que la démarche des allers-retours nécessaires (entre conjectures-calculs-essais machines - essais papier …) dans une démarche de recherche avec un logiciel n'est pas acquise.

$f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = (f')'$

$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

Exercice 1

$f^{(0)} = (ax^2 + bx + c)e^x$

$f^{(1)} = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x$

$f^{(2)} = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)e^x$

$f^{(3)} = (ax^2 + (6a + b)x + 6a + 3b + c)e^x$

$f^{(4)} = (ax^2 + (8a + b)x + 12a + 4b + c)e^x$

1. Conjecture :

$f^{(n)}(x) = [ax^2 + (2na + b)x + (n(n-1))a + nb + c] \times e^x.$

2. Démonstration :

On veut prouver que $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$

Calcul de $f^{(n-1)}$:

$f^{(n-1)} = (ax^2 + (2(n-1)a + b)x + (n-1)(n-2)a + (n-1)b + c)e^x$

$= (ax^2 + ((2n-2)a + b)x + (n^2 - n - 2n + 2)a + (n-1)b + c)e^x$

$= (ax^2 + 2nax - 2ax + bx + an^2 - 3na + 2a + nb + c)e^x$

$(f^{(n-1)})' = (ax^2 + 2ax - 2ax + bx + 2an - 3a + 2a + b + c)e^x$

$= (ax^2 + bx + 2an - a + b + c)e^x$

Nous n'aboutirons pas car nous n'arrivons pas à retrouver $f^{(n)}(x)$.