1 Identificateurs

1. Logiciel : logiciel de géométrie dynamique gèrant les nombres complexes.
2. Connaissances mathématiques : nombres complexes.
3. Classe : terminale S.

2 Fiche élève

2.1 Le problème

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ par :

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Quel est le lieu $\mathcal{G}$ des points M' d'affixe $Z = f(z)$ lorsque le point M d'affixe z parcourt le demi-plan défini par $\text{Re}(z) \geqslant 0$?

2.2 Avec un logiciel de géométrie dynamique

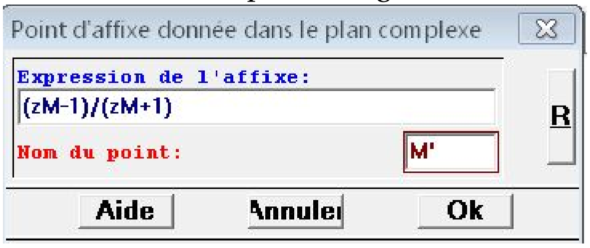
1. Faire une conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique.
2. Quel ensemble semble devoir décrire M pour que M' parcourt la frontière de $\mathcal{G}$?

2.3 Démontrer

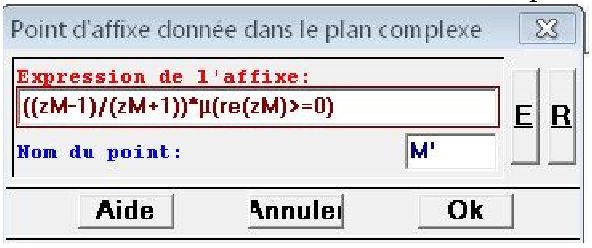
Éléments de réponses

3 Avec geoplan

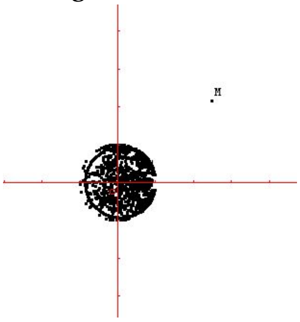
On crée un point M libre dans le plan.
On crée l'affixe zM (créer/avec les complexes/affixe d'un point dans le plan complexe).
On crée ensuite le point image M' (créer/avec les complexes/point d'affixe donnée dans le plan)



Pour éviter un contrôle visuel lors du déplacement du point M, on peut affiner ainsi :



On active ensuite la trace du point M'. On déplace M à la souris dans le demi-plan imposé. On obtient l'image suivante :



On conjecture que M' parcourt le disque de centre l'origine du repère et de rayon 1 lorsque M parcourt le demi-plan $\text{Re}(z) \geqslant 0$.
On conjecture que M' parcourt le cercle de centre O et de rayon 1 lorsque M parcourt l'axe $\text{Re}(z) = 0$.

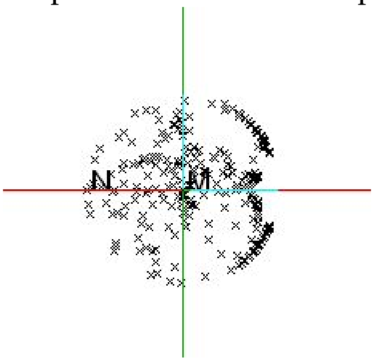
4 Avec Xcas

4.1 Expérimentation en géométrie dynamique

On ouvre une session de géométrie dynamique et l'on définit :

```
1 Fig  Edit  Graphe                 Pointeur
 1 M:=point(0,0)
   point(0,0)
 2 N:=point((affixe(M)-1)/(affixe(M)+1))
   point(-1,0)
 3 test:=re(affixe(M))>=0
   1
 4 trace(P:=quand(test,N,0))
   trace(pnt(pnt[-1,0,"P"]))
 5
```

On passe ensuite en mode pointeur et on balade le point M :



4.2 Quelques calculs

Quelques calculs Xcas menant vers une justification :

```
2 w:=(x+i*y-1)/(x+i*y+1)
```

$$\frac{x+i\cdot y-1}{x+i\cdot y+1}$$

```
3 abs(w)
```

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

```
4 solve(re(w)^2+im(w)^2<1,x)
```

$$[\ x>0\ ]$$

5 Éléments de justification

Pour $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$:

$$
\begin{aligned}
|Z| \leqslant 1 &\iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1 \\
&\iff |z-1| \leqslant |z+1| \\
&\iff |z-1|^2 \leqslant |z+1|^2 \\
&\iff (z-1)\left(\overline{z}-1\right) \leqslant (z+1)\left(\overline{z}+1\right) \\
&\iff z+\overline{z} \geqslant 0 \\
&\iff \operatorname{Re}(z) \geqslant 0
\end{aligned}
$$