Notions traitées : Distances. Continuité sur les espaces métriques. Espaces compacts. Espaces séparables. Espaces complets. Propriété de Baire. Théorème des contrations. Applications.

1 Distances

Exercice 1.1. Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$, définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1_A}(x) = 0$ si $x \notin A$, soit continue.

Exercice 1.2. Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $A \subset X$, avec $A \neq \emptyset$, on pose

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

a) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$$

est 1-lipschitzienne (c'-à-d qu'elle vérifie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad \forall x, y \in X).$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.

c) En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de X, il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U,\ G \subset V,\ U \cap V = \emptyset.$$

2 Utilisation de la compacité

Exercice 2.1.

1. Démontrer que si (X, d) est un espace métrique compact et $f \colon (X, d) \to (Y, d')$ est une application bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.
2. (Un contrexemple classique à la propriété précédente). Soit $f \colon [0, 2\pi[\to \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ l'application définie par $f(t) = e^{it}$. Démontrer que f est bijective et continue, mais f n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 2.2. (Utilisation de la compacité)

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé non vide. Démontrer que $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe dans A un point de meilleure approximation pour x_0 : $\exists\, a_0 \in A$ tel que $d(x_0, a_0) = \inf_{a \in A} d(x_0, a)$.
2. (Un contrexemple à la propriété précédente, dans un espace de dimension infinie). Soit $X = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la distance du sup : $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Vérifier que l'ensemble $A = \{f \in X \colon \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1\}$ est fermé. Calculer $d(0, A)$ et montrer qu'il n'y a pas de fonction $f \in A$ telle que $d(0, f) = d(0, A)$.

Exercice 2.3. (Un théorème de point fixe) Soient (K, d) un espace métrique compact et f : $K \to K$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x, y \in K$ et $x \neq y$.

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n \geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

3 Séparabilité

Exercice 3.1. Démontrer que tout espace m'etrique compact est séparable.

Exercice 3.2.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I infini non dénombrable et $(x_i)_{i\in I} \subset X$ tels que
$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \qquad \forall i, j \in I, i \neq j.$$
Montrer que (X, d) n'est pas séparable.
2. Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 3.3.

1. Soit c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que c_0 est séparable.
2. Soit $1 \leq p < \infty$. Démontrer que l'espace $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable.

4 Exemples d'espaces complets

Exercice 4.1. On considère sur $X =]0, +\infty[$ la distance euclidienne $d_e(x, y) = |x - y|$ et la distance d définie par $d(x, y) = |\ln x - \ln y|$.

1. Les distances d et d_e sont-elles métriquement équivalentes ? Sont-elles topologiquement équivalentes ?
2. L'espace (X, d_e) est-il complet ? Et l'espace (X, d) ?

Exercice 4.2. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Démontrer que si Y est complet, alors l'espace $C_b(X, Y)$ de toutes les fonctions continues et bornées de X dans Y est complet pour la distance $d(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$.

Retrouver que si $a < b$, alors l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme du sup, est un espace de Banach.

5 Applications du théorème de Baire

Exercice 5.1. (Théorème de Baire) Soit (X, d) un espace métrique complet.

1. (Théorème de Baire). Démontrer que l'intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans X.
2. Montrer que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide dans X.
3. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de X telle que $\cup_{n\geq 1} F_n = X$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 1} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense dans X.

Soient X un espace métrique complet, et A une partie de X. On dit que A est ***Baire-négligeable*** *(ou "maigre") si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de X d'intérieurs vides. Si une propriété est satisfaite en tout point de X sauf éventuellement dans un ensemble Baire-négligeable, on dit qu'elle est valable* ***Baire-presque partout****.*

Exercice 5.2. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer sur des exemples qu'en général f n'est pas continue.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : \forall p \geq n,\ |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent) et que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que } |f(x_0) - f(x)| \leq 3\varepsilon \ \text{ dans } V.$$

3. Démontrer que f est continue Baire-presque partout.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

6 Applications contractantes

Exercice 6.1. Soient (X, d) un espace métrique complet, $f\colon X \to X$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 6.2. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n \geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x_n) \subset [10, 11]$

1. Montrer que $Y = \{\, (y_n) \in \ell^\infty\colon (y_n) \subset [10, 11] \,\}$, muni de la distance $d\big((y_n), (y_n')\big) = \sup_n |y_n - y_n'|$ est complet.
2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F\colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.