

La partie DM est à rendre ...

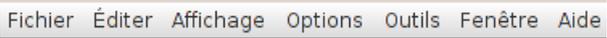
1 Les données

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = v_n + n - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + n \end{cases}$$

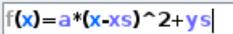
2 Partie expérimentale (en classe, séance TP info)

2.1 Création d'une représentation graphique avec geogebra

1. Dans le menu « affichage »  cocher « tableur ». Entrer en colonne A les valeurs des premiers indices, ainsi que les valeurs de u_0 et de v_0 en cellules B1 et C1.
2. Entrer alors en cellules B2, C2 les formules nécessaires pour déterminer par les formules de récurrence de l'énoncé les termes successifs des suites (u_n) et (v_n) et tirer cette formule vers le bas.
3. On sélectionne ensuite les cellules A1 à A29 et les cellules B1 à B29, puis clic droit sur la sélection, et dans le menu qui s'affiche, on choisit créer/liste de points. On obtient une représentation graphique de la suite (u_n) .
4. Avec la molette de la souris, on peut zoomer ou dézoomer le graphique obtenu. Quelle conjecture peut-on émettre pour une formule explicite de u_n en fonction de n ?

2.2 Première démarche pour affiner la conjecture

1. On peut conjecturer, au vu de la représentation graphique obtenue, une expression de la forme $u_n = an^2 + bn + c$. En admettant que les points observés se trouvent bien sur une parabole, on va chercher à estimer la valeur des coefficients a, b, c . Pour cela, définir en ligne de saisie trois variables : $a=1, x_s=1, y_s=1$. Puis la fonction $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$.

Saisie: 

2. Un clic droit dans la fenêtre d'algèbre sur a, x_s, y_s permet de les afficher en tant que curseurs. On peut alors ajuster la courbe représentative de f de façon à la superposer au mieux aux points de la représentation de u et ainsi émettre une conjecture sur les valeurs des coefficients a, b, c . Donner une estimation des valeurs de a, b, c à partir de ce travail sur les curseurs a, x_s, y_s . Ne pas hésiter à zoomer si nécessaire pour affiner...

2.3 Renforcer la conjecture

Avant d'aborder des étapes de démonstration, il est utile de chercher à renforcer la plausibilité d'une conjecture : cela permet de s'engager sur des tentatives de démonstration qui ont plus de chance d'aboutir.

Pour cela, entrer en cellule D1 du tableur la formule $=f(A1)$ puis tirer cette formule vers le bas afin de comparer les valeurs obtenues avec celles de la colonne B.

2.4 Seconde démarche pour déterminer les coefficients a, b, c .

Entrer dans une ligne de commandes du logiciel Xcas les lignes suivantes :

```
f(x) :=a*x^2+b*x+c ;  
resoudre ([ f(1)=-2, f(2)=-3, f(3)=-2 ],[ a , b , c ])
```

Vérifier que vous retrouvez les valeurs de a, b, c déjà conjecturées avec geogebra. *La démarche correspondant à ces commandes n'est pas expliquée : vous aurez à l'analyser dans la partie DM. On rappelle qu'en passant par le menu aide/index, on peut trouver le détail de la définition d'une commande Xcas.*

2.5 Conjecture pour la suite (v_n)

Conjecturer par une démarche analogue une expression explicite de v_n en fonction de n .

Remarque. Vous aurez peut-être à sélectionner des cellules de colonnes ne se trouvant pas côte à côte dans le tableur de geogebra : il suffit pour cela de laisser le bouton ctrl enfoncé lors de la sélection des cellules à la souris.

3 Le devoir à la maison

1. Écrire un programme pour votre calculatrice :

Entrée un entier naturel n .

Sortie L'affichage de la valeur de u_n et de la valeur de v_n .

Cet algorithme utilisera la définition par récurrence donnée dans l'énoncé (et non la formule explicite trouvée lors de la partie expérimentale).

2. Donner les formules tableur utilisées en 2.1.
3. Vous expliquerez ensuite la démarche utilisée en 2.4 (expliquez pourquoi on s'attend à ce que les commandes écrites dans xcas suffisent à obtenir des valeurs pour a , b , c).
4. Dans la dernière partie de ce DM, vous chercherez à démontrer les formules explicites trouvées pendant le TP pour u_n et v_n .