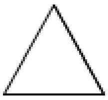
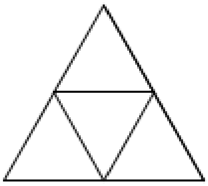
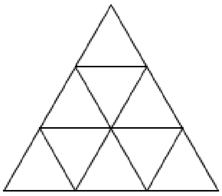
Combien de triangles équilatéraux dans le triangle ?



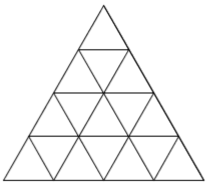
Soit un triangle équilatéral de côté 1 : un triangle (triangle unité)



Soit un triangle de côté 2 : 5 triangles $\begin{cases} 4\ triangles\ unit\acute{e} \\ 1\ triangle\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 2 \end{cases}$

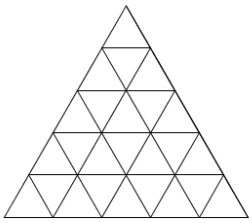


Soit un triangle de côté 3 : $13\ triangles$ $\begin{cases} 9\ \ triangles\ unit\acute{e}s \\ 3\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 2 \\ 1\ triangle\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 3 \end{cases}$



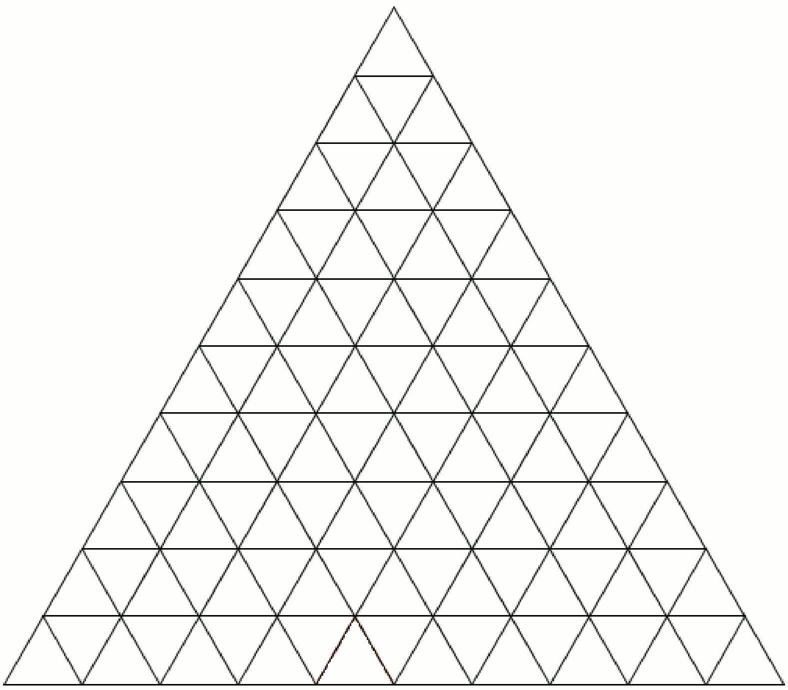
Soit un triangle de côté 4 : $27\ \ triangles$ $\begin{cases} 16\quad triangles\ unit\acute{e} \\ 7\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 2 \\ 3\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 3 \\ 1\ triangle\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 4 \end{cases}$

Poursuivons… Jusqu'où êtes-vous prêts à compter ?



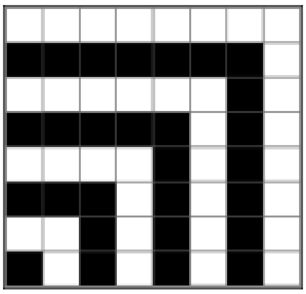
Soit un triangle de côté 5 : $48\ triangles$ $\begin{cases} 25\ triangles\ unit\acute{e} \\ 13\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 2 \\ 6\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 3 \\ 3\ triangles\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 4 \\ 1\ triangle\ de\ c\hat{o}t\acute{e}\ 5 \end{cases}$

Et pour le triangle de côté 10 ? Etes-vous prêts à compter ? Cherchez-vous une formule ? Quels sont les moyens d'obtenir une réponse sans raisonner ? Quel raisonnement mette en œuvre ?



Quelques observations…

Première observation : il est facile de conjecturer le nombre de triangles unité en fonction de n désigné par u(n). On observe que u(n) = n^2. Pourquoi ? Il est possible de découper le triangle de côté n en n bandes numérotées de 1 à n du sommet à la base. Les bandes successives comportent 1, 3 5, … ($2n – 1$) triangles ; la bande n comporte n triangles pointe en haut et ($n – 1$) triangles « pointe en bas » ce qui fait bien ($2n – 1$) triangles. D'où u(n) = 1 + 3 + 5 + … + ($2n$ – 1) = n^2. Ce résultat peut se démontrer par récurrence mais une preuve sans mot est aussi très convaincante :



Remarque : Il est aussi possible de dénombrer ces triangles unité en séparant les triangles « pointe en haut » et « pointe en bas » :

Sur la bande k il y a k triangles pointe en haut d'où dans le triangle de côté n,
$1 + 2 + 3 + … + n = n(n + 1)/2$ triangles pointe en haut.
Sur la bande k, il y a (k – 1) triangles pointe en bas d'où dans le triangle de côté n,
$0 + 1 + 2 + …+ (n – 1) = (n – 1)n/2$ triangles pointe en bas, ce qui donne $[n(n + 1) + (n – 1)n]/2 = n^2$ triangles unité.

Deuxième observation : On remarque assez rapidement qu'il faut différencier les triangles « pointe en haut » de ceux « pointe en bas ». Le comptage des triangles « pointe en haut » est plus facile car ils sont de même forme que le grand triangle. Le comptage des triangles « pointe en bas » fait apparaitre une différence suivant la parité de n. Le tableau peut se compléter de façon quasi automatique en commençant par la première colonne : pour Tn il y a n(n+1)/2 $\wedge$ et (n-1)n/2 $\vee$.

Pour les $\wedge$ il suffit de recopier à partir de la colonne 2 la séquence de la ligne T(n - 1), n >1

Pour les $\vee$ il suffit de recopier à partir de la colonne 2 la séquence de la ligne T(n – 2), n >2

A justifier…

Tr		l 1	l 2	l 3	l 4	l 5	l 6	l 7	l 8	l 9	l 10	totaux	total
T1	$\wedge$	1										1	1
	$\vee$	0										0	
T2	$\wedge$	3	1									4	5
	$\vee$	1										1	
T3	$\wedge$	6	3	1								10	13
	$\vee$	3										3	
T4	$\wedge$	10	6	3	1							20	27
	$\vee$	6	1									7	
T5	$\wedge$	15	10	6	3	1						35	48
	$\vee$	10	3									13	
T6	$\wedge$	21	15	10	6	3	1					56	78
	$\vee$	15	6	1								22	
T7	$\wedge$	28	21	15	10	6	3	1				84	118
	$\vee$	21	10	3								34	
T8	$\wedge$	36	28	21	15	10	6	3	1			120	170
	$\vee$	28	15	6	1							50	
T9	$\wedge$	45	36	28	21	15	10	6	3	1		165	235
	$\vee$	36	21	10	3							70	
T10	$\wedge$	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	220	315
	$\vee$	45	28	15	6	1						95	

Et pour un triangle de côté *n* ?

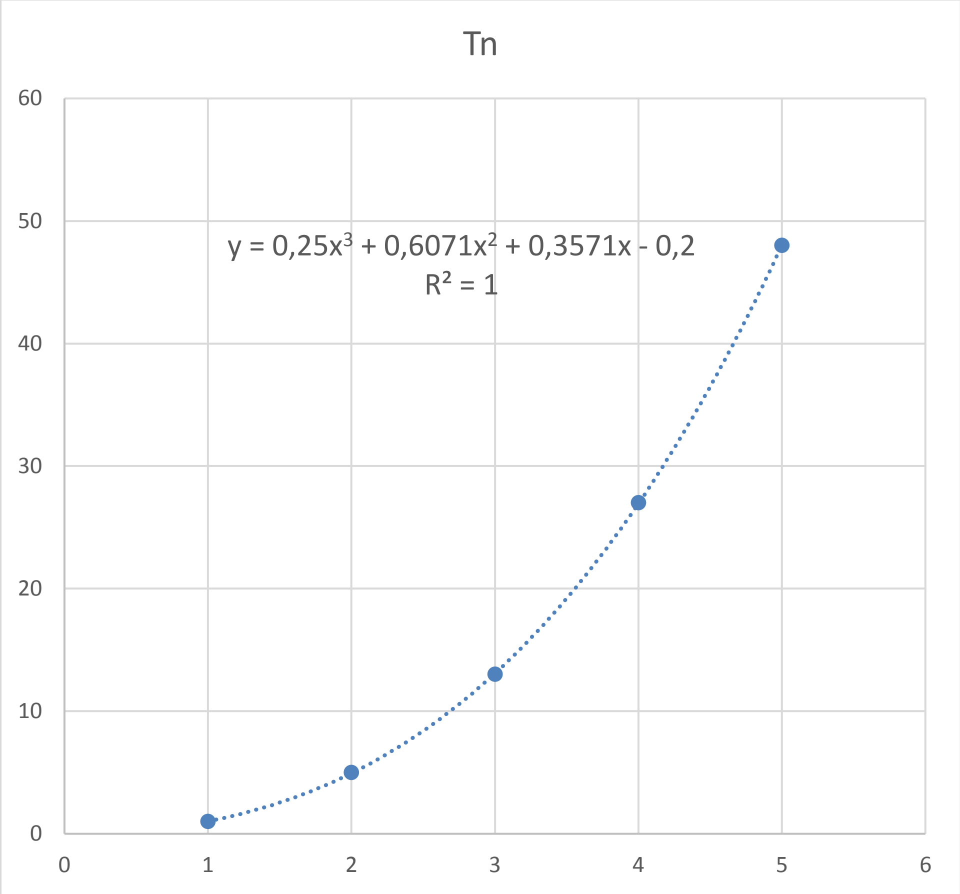
Peut-on exprimer le nombre de triangles T(*n*) en fonction de *n* ?

Investigation :

Observons les premières données :

n	Tn
1	1
2	5
3	13
4	27
5	48

Un ajustement polynomial de degré 3 donne…vu les coefficients, pas très inspirant malgré le R^2=1!



Pourquoi rechercher un polynôme de degré 3 ? Regardons le **tableau des différences** sur les premières valeurs de T(n): Dn = T(n+1) - T(n)

n	**Tn**	**d1**	**d2**	**d3**
1	1	4	4	2
2	5	8	6	1
3	13	14	7	
4	27	21		
5	48			

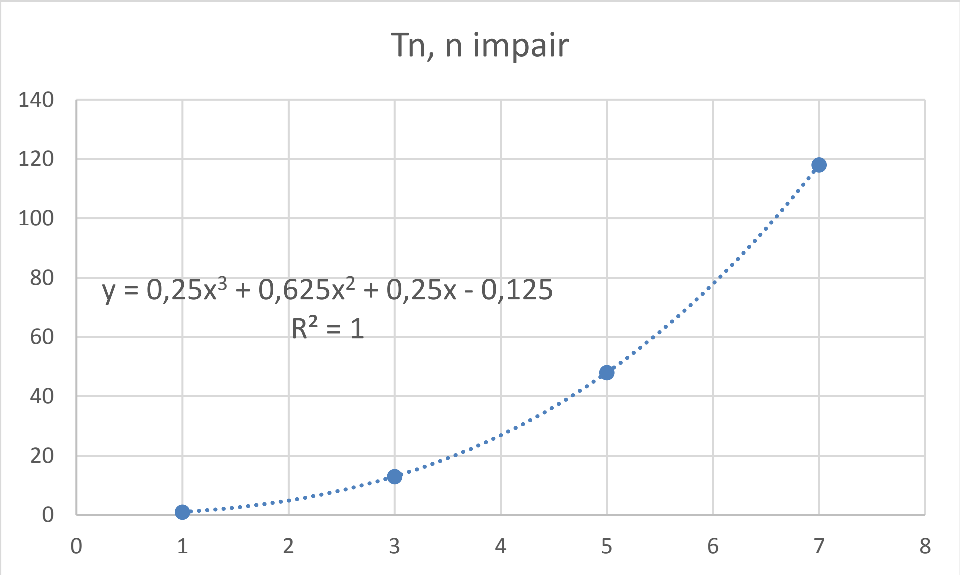
Les différences troisièmes ne sont pas constantes… Il faut aller plus loin pour observer ce qui se passe…

n	**Tn**	**d1**	**d2**	**d3**
1	1	4	4	2
2	5	8	6	1
3	13	14	7	2
4	27	21	9	1
5	48	30	10	
6	78	40		
7	118			

Les différences troisièmes sont constantes égales alternativement à 2 et 1… Distinguons alors la suite des termes de rangs pairs de celle des termes de rangs impairs.

Pour les rangs impairs :

n	Tn, n impair
1	1
3	13
5	48
7	118



Les coefficients sont plus sympathiques…

Avec Xcas déterminons le polynôme de degré 3 prenant les valeurs du tableau ci-dessus

```
1 lagrange([1,3,5,7],[1,13,48,118],n)
```

$$(n-1)*((n-3)*(\frac{n-5}{4}+\frac{23}{8})+6)+1$$

```
2 developper((n-1)*((n-3)*((n-5)/4+23/8)+6)+1)
```

$$\frac{n^3}{4}+\frac{5*n^2}{8}+\frac{n}{4}-\frac{1}{8}$$

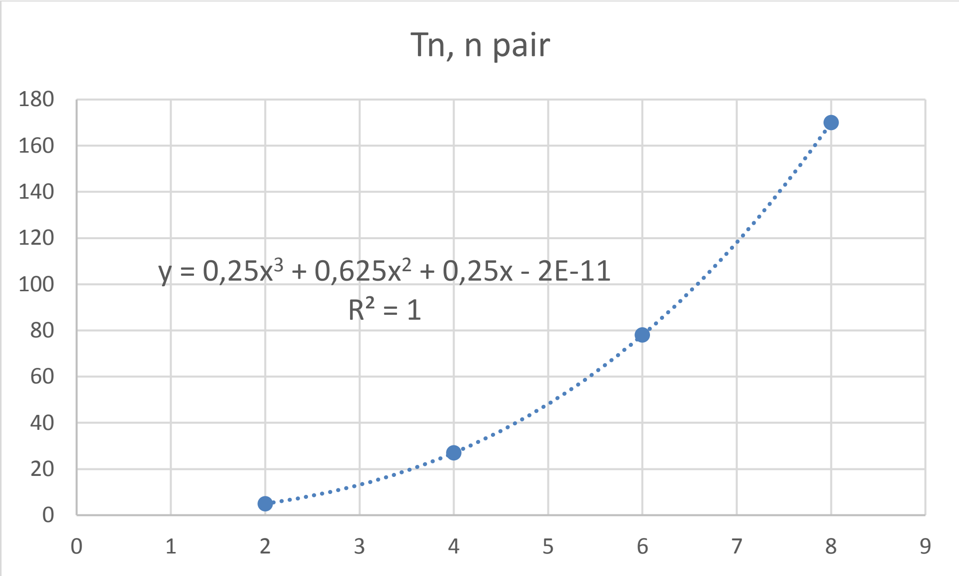
Cela correspond bien à l'équation de la courbe de tendance.

Pour les rangs pairs :

n	Tn, n pair
2	5
4	27
6	78

C'est insuffisant pour déterminer un polynôme de degré 3 … Il faudrait la valeur de T8… Avec T8 :

n	Tn, n pair
2	5
4	27
6	78
8	170



2 E-11 = 0 ?

```
lagrange([2,4,6,8],[5,27,78,170],n)
```

$$(n-2)*((n-4)*(\frac{n-6}{4}+\frac{29}{8})+11)+5$$

```
factoriser((n-2)*((n-4)*((n-6)/4+29/8)+11)+5)
```

$$\frac{n*(n+2)*(2*n+1)}{8}$$

```
developper(n*(n+2)*(2*n+1)/8)
```

$$\frac{n^3}{4}+\frac{5*n^2}{8}+\frac{n}{4}$$

Il y a donc bien une différence entre l'expression fonction de *n* des termes de rangs pairs et l'expression des termes de rangs impairs… Les réponses obtenues correspondent bien aux premières valeurs de n ($n \leq 8$).

Comment démontrer ces résultats ? Est-ce que l'expression des résultats nous donne des indications sur la démarche ?

Démonstration

Distinguons les triangles « pointe en haut » des « triangles pointe en bas ».

A. Les triangles pointant vers le haut ont la « même forme » que le plus grand triangle de côté n.

Chacun de ces triangles est entièrement déterminé par la donnée des deux points extrémités de sa base. Cette base peut se trouver soit sur la ligne horizontale 1 (qui ne comporte que 2 points), sur la ligne 2 , …, ou sur la ligne n (qui comporte n + 1 pointschoix, résultat valable pour *k* variant de 1 à *n*. Au total, le nombre de triangles pointant vers le haut est

$$U(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

```
factoriser(somme(k,k,1,n))
```

$$\frac{n*(n+1)}{2}$$

```
factoriser(somme(k^2,k,1,n))
```

$$\frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$$

Les résultats précédents se démontrent par récurrence puis,

```
factoriser(U(n):=1/2*(n*(n+1)/2+n*(n+1)*(2*n+1)/6))
```

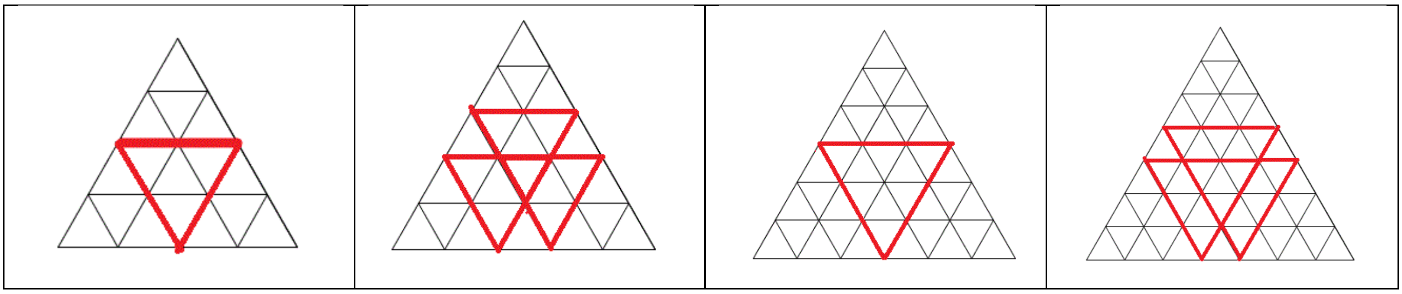
```
// Interprète U
// Succès
// lors de la compilation U
```

$$n\text{->}\ \frac{n*(n+1)*(n+2)}{6}$$

Le nombre de triangles équilatéraux pointant vers le haut est

$$\boxed{U(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

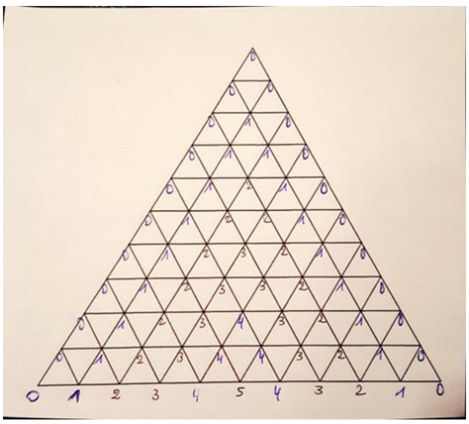
B. **Les triangles pointant vers le bas** ont une taille maximale qui dépend de la parité de n. C'est ce qui complique un peu le calcul. C'est pourquoi nous allons distinguer les deux cas, n pair puis n impair.



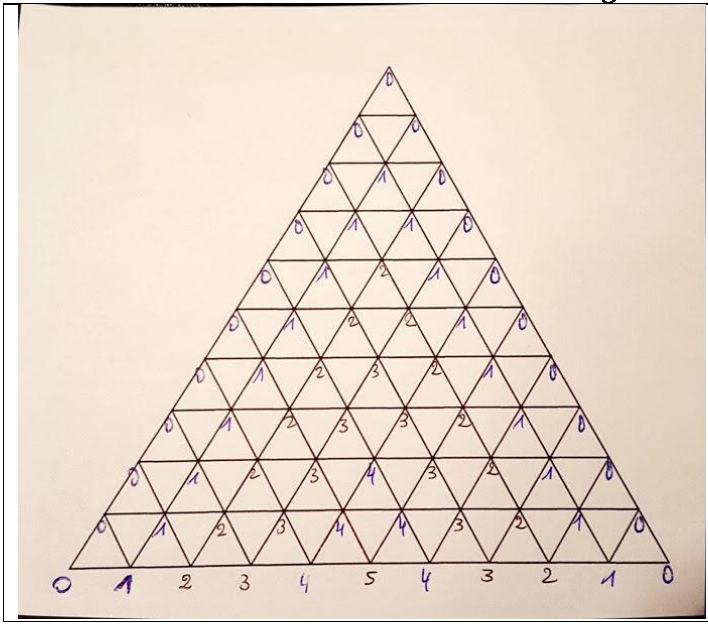
Soit **V(n)** le nombre de triangles pointe en bas.

On sait déjà que V(1) = 0 V(2) = 1 V(3) = 3 V(4) = 7. On peut convenir que V(0) = 0

En regardant chaque point du maillage comme la pointe de triangles « tête en bas »….



I. Première méthode : calcul direct grâce à un codage



Sous chaque point, considéré comme la pointe d'un triangle « tête en bas », inscrivons le nombre de triangles tête en bas dont c'est la pointe.

Ce nombre est égal à la « distance » suivant le maillage du point au bord le plus proche du grand triangle. D'où des lignes de 0, 1, 2 etc de la forme Λ qui se réduisent à un point si n est pair.

La ligne Λ de 0, ligne extérieure du triangle, est de longueur 2n et comporte 2n+ 1 points
La ligne Λ de 1, est de longueur 2n – 4 et comporte 2n – 3 points sommets chacun d'1 triangle
Plus généralement :
La ligne Λ de k, est de longueur 2n – 4k et comporte 2n – 4k +1 points sommets chacun de k triangles
Ceci est valable jusqu'à k = p si n = 2p et également jusqu'à k = p si n = 2p + 1. Plus précisément
Si n = 2p, la ligne Λ de p est réduite à 1 point sommet de p triangles
Si n = 2p + 1, la ligne Λ de p est réduite à 3 points sommets chacun de p triangles
D'où le nombre de triangles pointes en bas en faisant la somme ligne brisée par ligne brisée :

<u>Si n = 2p</u>

$$V(2p) = \sum_{k=1}^{k=p} k(4p-4k+1) = 4p\sum_{k=1}^{k=p} k - 4\sum_{k=1}^{k=p} k^2 + \sum_{k=1}^{k=p} k$$
$$= 2p^2(p+1) - \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3} + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{6}(12p-4(2p+1)+3)$$
$$= \frac{p(p+1)(4p-1)}{6} = \frac{2p(2p+2)(4p-1)}{24}$$

Finalement, si **n est pair** :

$$V(n) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}$$

<u>Si n = 2p + 1</u>

V(2p + 1) =

$$\sum_{k=0}^{k=p} k(4p+2-4k+1) = 4p\sum_{k=0}^{k=p} k - 4\sum_{k=0}^{k=p} k^2 + \sum_{k=0}^{k=p} 3k$$
$$= 2p^2(p+1) - \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3} + \frac{3p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{6}(12p-4(2p+1)+9)$$
$$= \frac{p(p+1)(4p+5)}{6} = \frac{2p(2p+2)(4p+5)}{24}$$

Finalement, si **n est impair** :

$$V(n) = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}$$

Reste à ajouter $U(n)$ et $V(n)$: voir plus loin…après une seconde méthode…

II. Deuxième méthode : un raisonnement par récurrence

Etablissons des relations de récurrence entre V(n) et V(n + 1) en remarquant que lorsqu'on passe d'un rang n au suivant n + 1, on ajoute des triangles pointe en bas dont la taille maximale est (n + 1)/2 si n est impair (alors n + 1 pair) et n/2 si n est pair (alors n+1 impair).

1) **Si *n* est pair,** il existe $p \geq 0$ tel que $\boldsymbol{n = 2p}$. Alors, **n + 1 = 2p + 1.**
Etablissons la relation de récurrence entre V(2p) et V(2p+1), p ≥ 0

V(2p+1) dénombre tous les triangles pointe en bas de V(2p) plus tous ceux qui ont leur pointe sur la ligne inférieure soit :

2p triangles unité,
2p – 2 = 2(p – 1) triangles de côté 2,
2p – 4 = 2(p – 2) triangles de côté 3,
…………….
2 =2(1) triangles de côté p,

Ce qui fait que l'on a ajouté $2(1 + 2 + \ldots + p) = p(p + 1)$ triangles pointe en bas, d'où pour tout $p \geq 0$

$$\underline{\mathbf{V(2p + 1) = V(2p) + p(p + 1) \quad (1)}}$$

2) **Si *n* est impair,** il existe $p > 0$ tel que $\boldsymbol{n = 2p - 1}$. **Alors, n + 1 = 2p.**
Etablissons la relation de récurrence entre V(2*p*) et V(2*p* – 1), p > 0

V(2p) dénombre tous les triangles pointe en bas de V(2p – 1) plus tous ceux qui ont leur pointe sur la ligne inférieure soit :

2p – 1 triangles unité,
2p – 3 triangles de côté 2
2p – 5 triangles de côté 3
………………..
1 triangle de côté p

Ce qui fait que l'on a ajouté $1 + 3 + \ldots + (2p - 1) = p^2$ triangles pointe en bas avec $p > 0$

$$\underline{\mathbf{V(2p) = V(2p - 1) + p^2 \quad (2)}}$$

3) **En combinant (1) et (2) établissons une relation de récurrence entre les termes de rang de même parité**

Pour tout $p \geq 1$ $\quad V(2p) = V(2p - 1) + p^2 = V(2p - 2) + (p - 1)p + p^2$

d'où, pour tout $p \geq 1$, $\quad \mathbf{V(2p) = V(2p - 2) + 2p^2 - p}$

D'autre part, pour tout $p \geq 1$, $\quad V(2p + 1) = V(2p) + p(p+1) = V(2p - 1) + p^2 + p(p + 1)$

d'où pour tout $p \geq 1$, $\quad \mathbf{V(2p + 1) = V(2p - 1) + 2p^2 + p}$

D'où les deux relations de récurrence, l'une pour les rangs pairs et l'autre pour les rangs impairs.

Pour tout $p \geq 1$ $\quad \mathbf{V(2p) = V(2(p - 1)) + 2p^2 - p \quad \text{et } V(0) = 0 \qquad (3)}$

Pour tout $p \geq 1$ $\quad \mathbf{V(2p + 1) = V(2(p - 1) + 1) + 2p^2 + p \quad \text{et } V(1) = 0 \qquad (4)}$

4) Recherche du terme général de V(n) dans chacun des cas, n pair et n impair

a) Pour les rangs pairs :

D'après (3) $V(2k) - V(2k-2) = 2k^2 - k$. En sommant ces égalités pour k variant de 1 à p, on obtient après télescopage et en utilisant V(0) = 0:

$$\boldsymbol{V(2p)} = \sum_{k=1}^{p} (2k^2 - k) = 2.\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - \frac{p(p+1)}{2} = \boldsymbol{\frac{p(p+1)(4p-1)}{6}}$$

soit en revenant à **n = 2p**

$$\boldsymbol{V(n) = \frac{p(p+1)(4p-1)}{6} = \frac{2p(2p+2)(4p-1)}{24} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}}$$

b) Pour les rangs impairs :

D'après (4) $V(2k+1) - V(2k-1) = 2k^2 + k$. En sommant ces égalités pour k variant de 1 à p, on obtient par télescopage ;

$$\boldsymbol{V(2p+1)} = \sum_{k=1}^{p} (2k^2 + k) = 2.\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} = \boldsymbol{\frac{p(p+1)(4p+5)}{6}}$$

soit en revenant à **n = 2p + 1**

$$\boldsymbol{V(n) = \frac{p(p+1)(4p+5)}{6} = \frac{2p(2p+2)(4p+5)}{24} = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}}$$

III) La formule générale : Finalement, pour tout *n*, ***T*(*n*) = *U*(*n*) + *V*(*n*)**

Si *n* est pair

$$\boldsymbol{T(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} = \frac{n(n+2)(6n+3)}{24} = \boldsymbol{\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}}$$

Si *n* est impair

$$\boldsymbol{T(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} = \boldsymbol{\frac{(n+1)(6n^2+9n-3)}{24}}$$

Les expressions semblent différentes mais si l'on développe :

$$\boldsymbol{\textit{si n est pair}} \qquad \boldsymbol{T(n)} = \frac{2n^3+5n^2+2n}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n}$$

$$\boldsymbol{\textit{si n est impair}} \qquad \boldsymbol{T(n)} = \frac{6n^3+15n^2+3n-3}{24} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n - \frac{1}{8}}$$

Or $T(n)$ est un entier et $T(n) < T(n) + \frac{1}{8} < T(n) + 1$ d'où $\mathrm{Ent}[T(n)] = \mathrm{Ent}[T(n) + \frac{1}{8}]$

Finalement, on peut ne retenir qu'une seule expression :

$$\boldsymbol{\textit{Pour tout entier } n,\ T(n) = Ent\ \left[\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n\right] = Ent\left[\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}\right]}$$