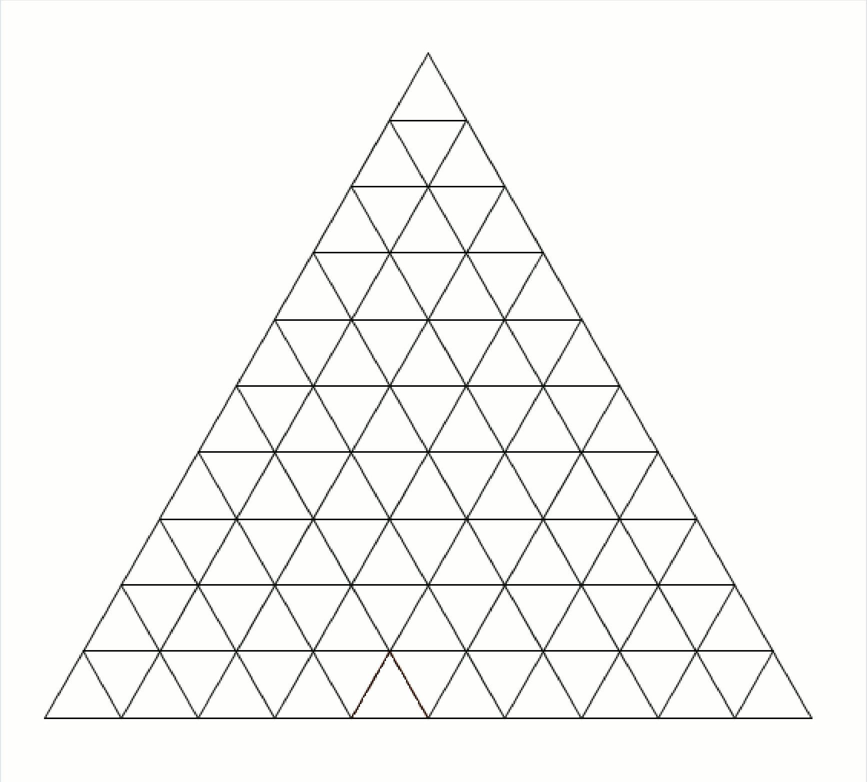
Des triangles dans le triangle

Quelle prise d’initiative dans cette recherche?
Quelles investigations?

Des triangles dans le triangle: le problème

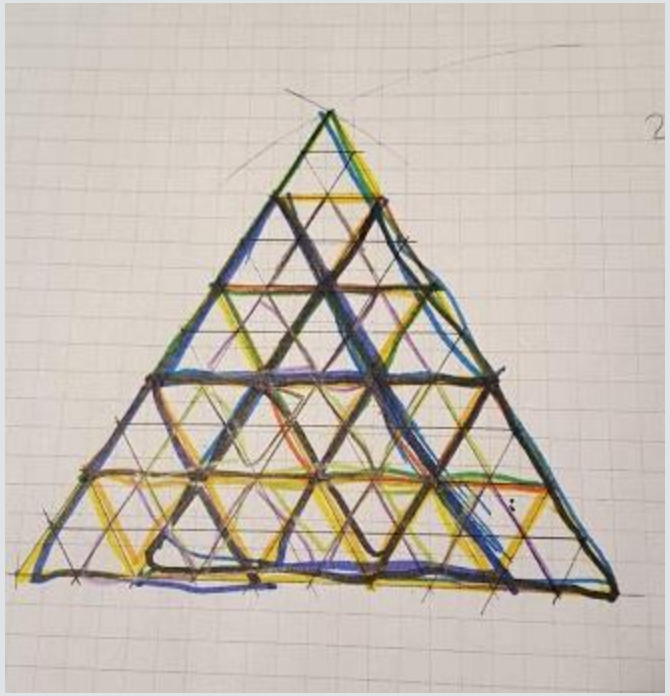
Combien de triangles équilatéraux dans le triangle ?

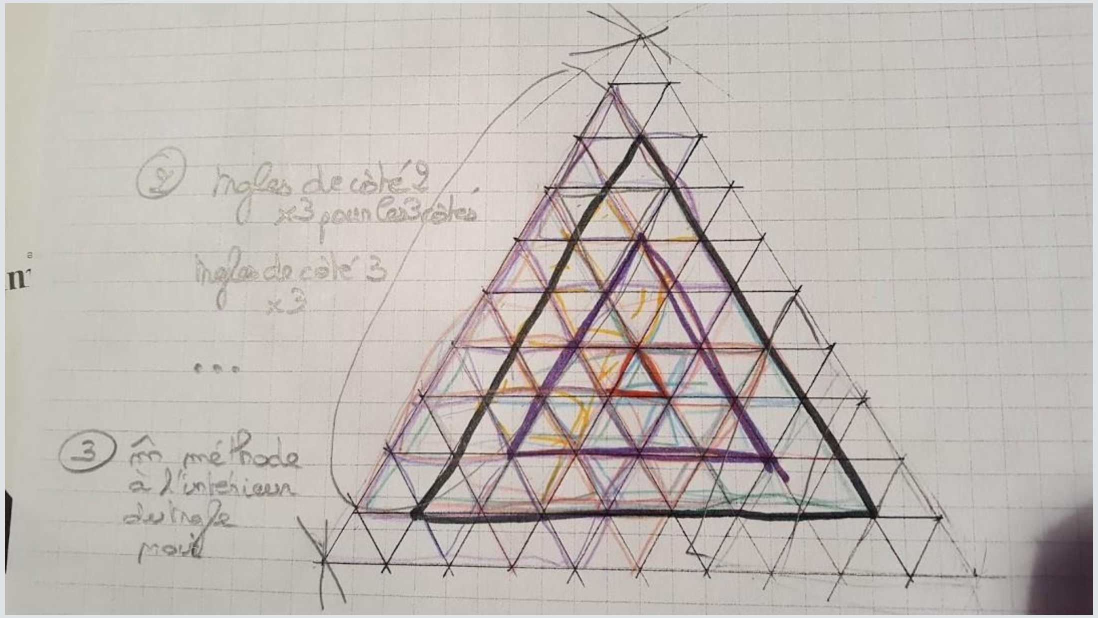


Des triangles dans le triangle

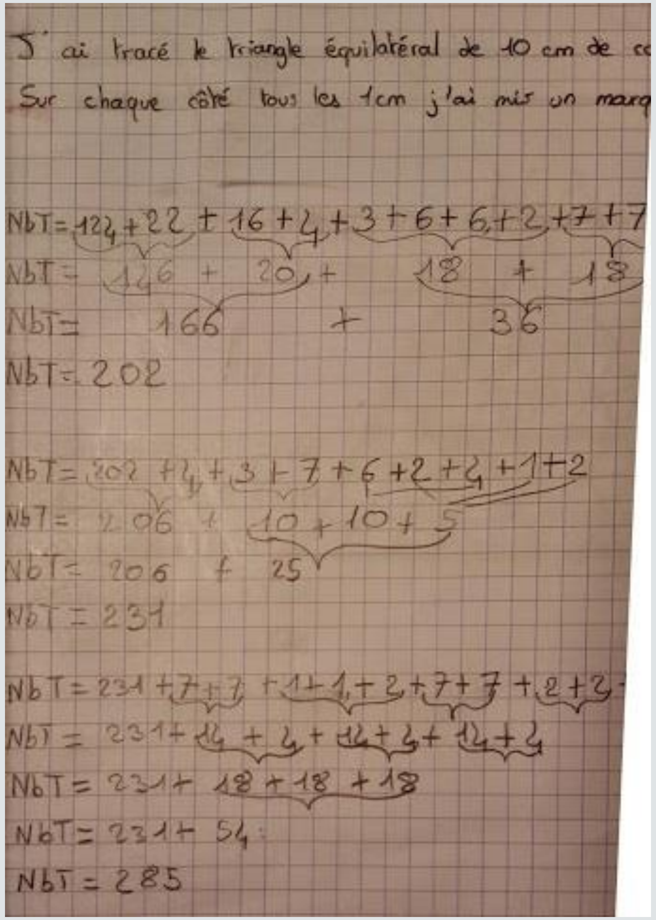
Recherches

Des triangles dans le triangle: la recherche





Des triangles dans le triangle: la recherche



J'ai tracé le triangle équilatéral de 10 cm de c
Sur chaque côté tous les 1cm j'ai mis un marq

$NbT = \underbrace{124 + 22}_{} + \underbrace{16 + 4}_{} + \underbrace{3 + 6 + 6 + 2}_{} + \underbrace{7 + 7}_{}$

$NbT = \underbrace{146 + 20}_{} + \underbrace{18 + 18}_{}$

$NbT = 166 + 36$

$NbT = 202$

$NbT = \underbrace{202 + 4}_{} + \underbrace{3 + 7}_{} + 6 + 2 + 4 + 1 + 2$

$NbT = 206 + \underbrace{10 + 10 + 5}_{}$

$NbT = 206 + 25$

$NbT = 231$

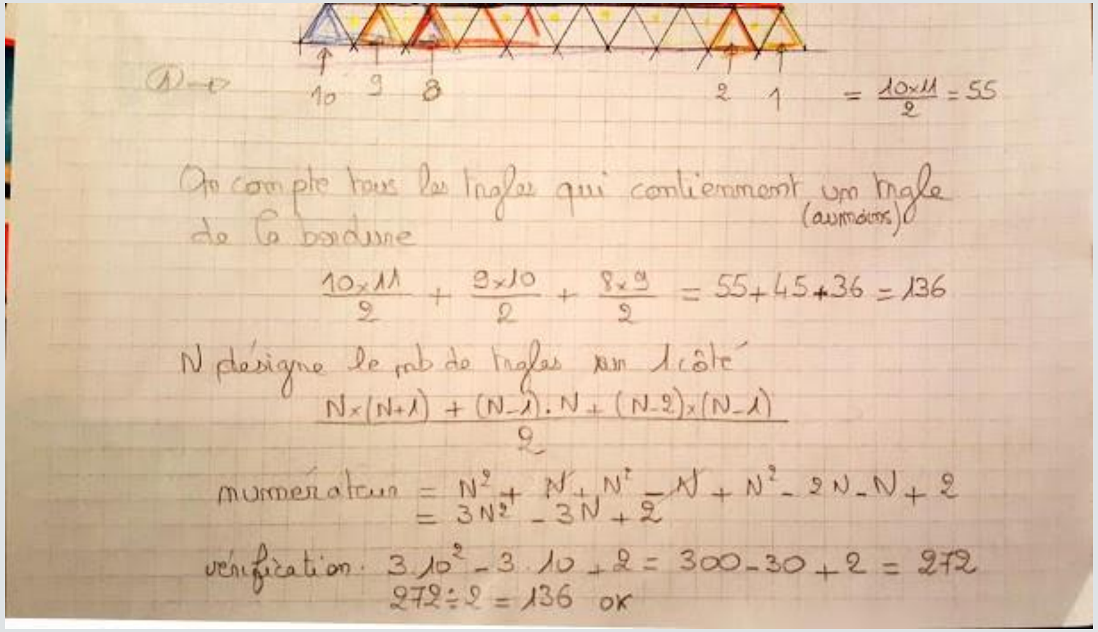
$NbT = 231 + \underbrace{7 + 7}_{} + \underbrace{1 + 1 + 2}_{} + \underbrace{7 + 7}_{} + \underbrace{2 + 2}_{}$

$NbT = 231 + \underbrace{14 + 4}_{} + \underbrace{14 + 4}_{} + \underbrace{14 + 4}_{}$

$NbT = 231 + \underbrace{18 + 18 + 18}_{}$

$NbT = 231 + 54$

$NbT = 285$



$① \rightarrow$ 10 9 8 2 1 $= \frac{10 \times 11}{2} = 55$

On compte tous les trgles qui contiennent un trgle (au moins) de la bordure

$$\frac{10 \times 11}{2} + \frac{9 \times 10}{2} + \frac{8 \times 9}{2} = 55 + 45 + 36 = 136$$

N désigne le nb de trgles sur 1 côté

$$\frac{N \times (N+1) + (N-1) \cdot N + (N-2) \times (N-1)}{2}$$

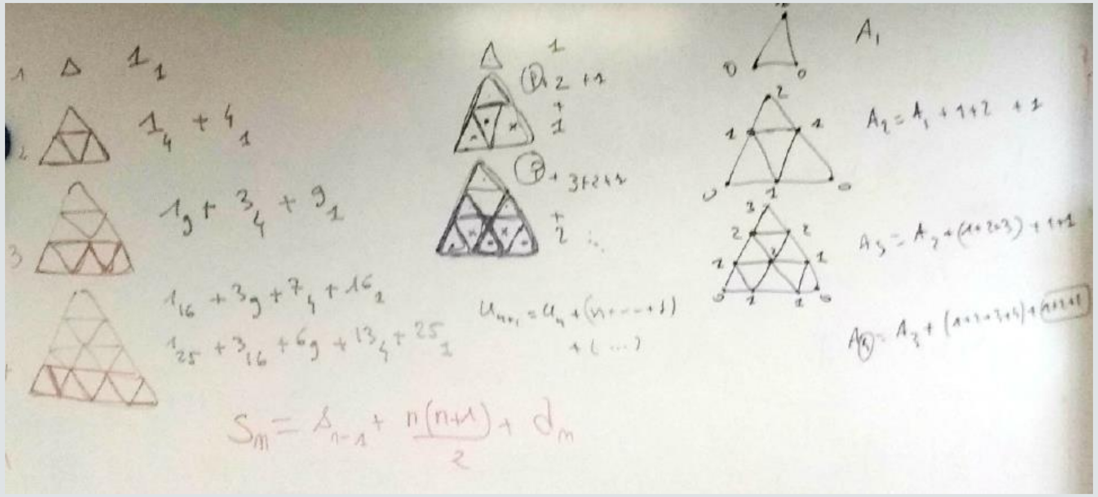
numérateur $= N^2 + N + N^2 - N + N^2 - 2N - N + 2$
$= 3N^2 - 3N + 2$

vérification. $3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 2 = 300 - 30 + 2 = 272$
$272 \div 2 = 136$ ok

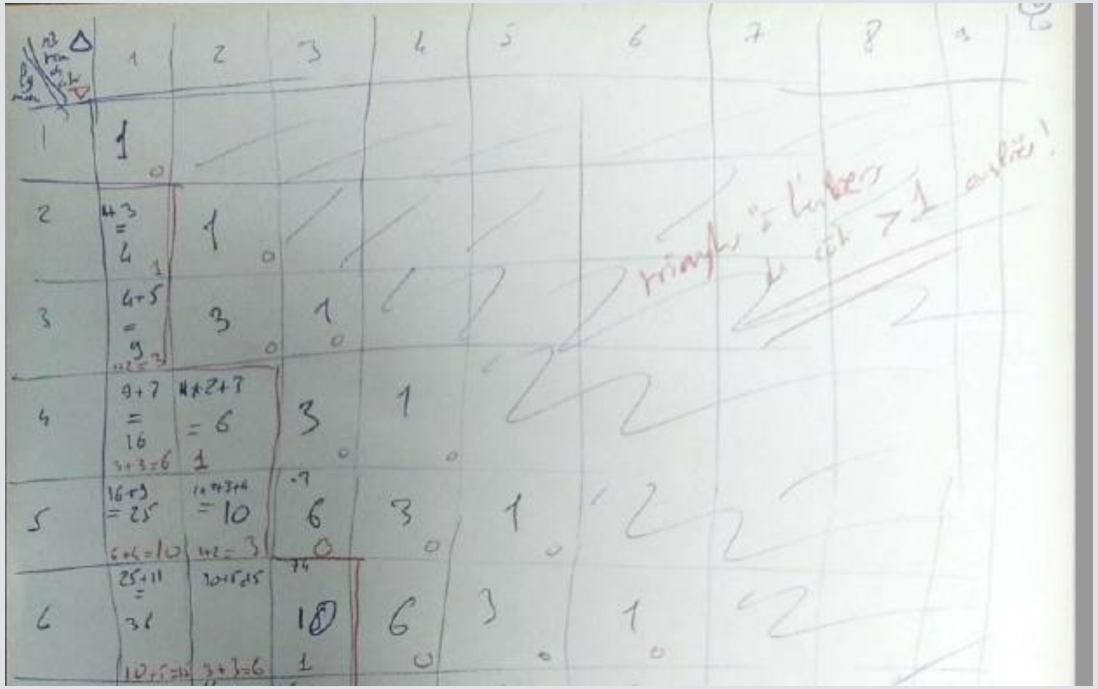
Des triangles dans le triangle: la recherche

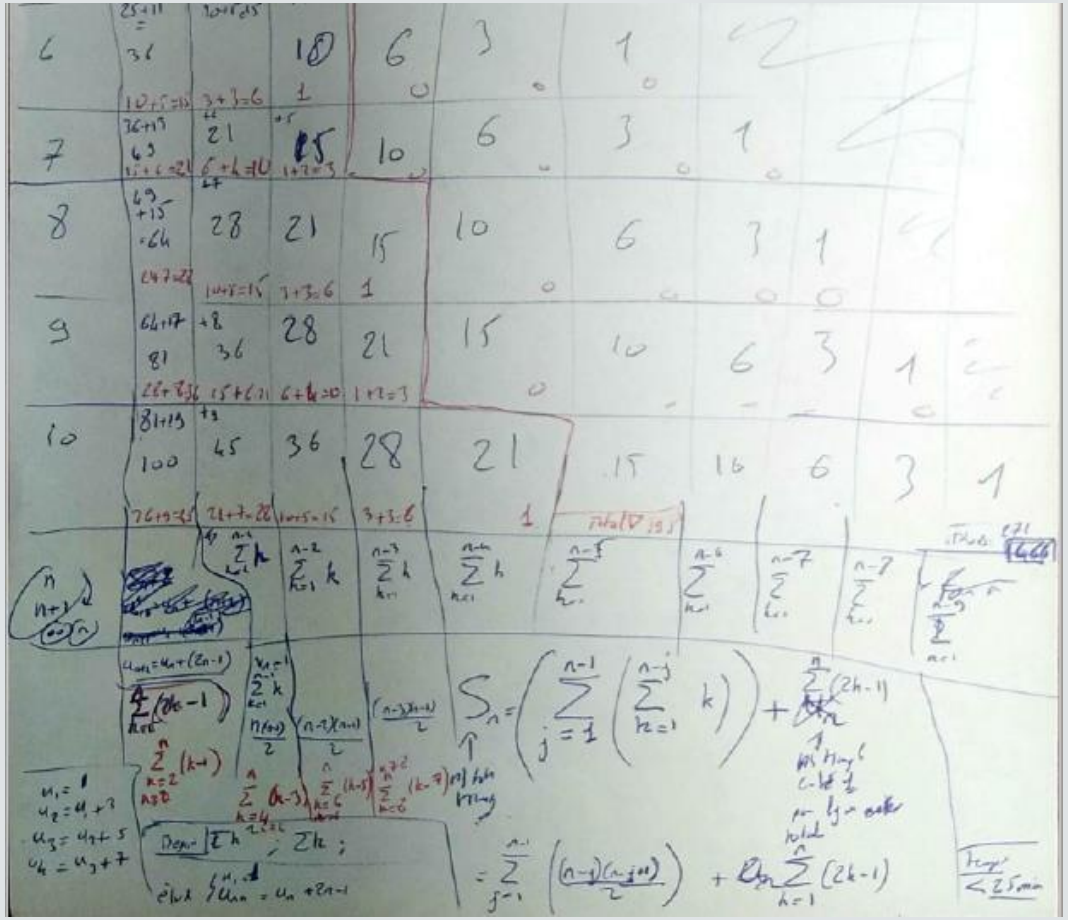
Manon 18 ans TS :
dénombrement selon l’aire

- au rang 1 : 1 triangle de coté 1
- au rang 2 : 1 de 4 + 4 de 1
- au rang 3 : 1 de 9 + 3 de 4 + 9 de 1
- au rang 5 : 1 de 16 + 3 de 9 + 7 de 4 + 16 de 1
- au rang 6 : 1 de 25 + 3 de 16 + 6 de 9 + 13 de 4 = 25 de 1

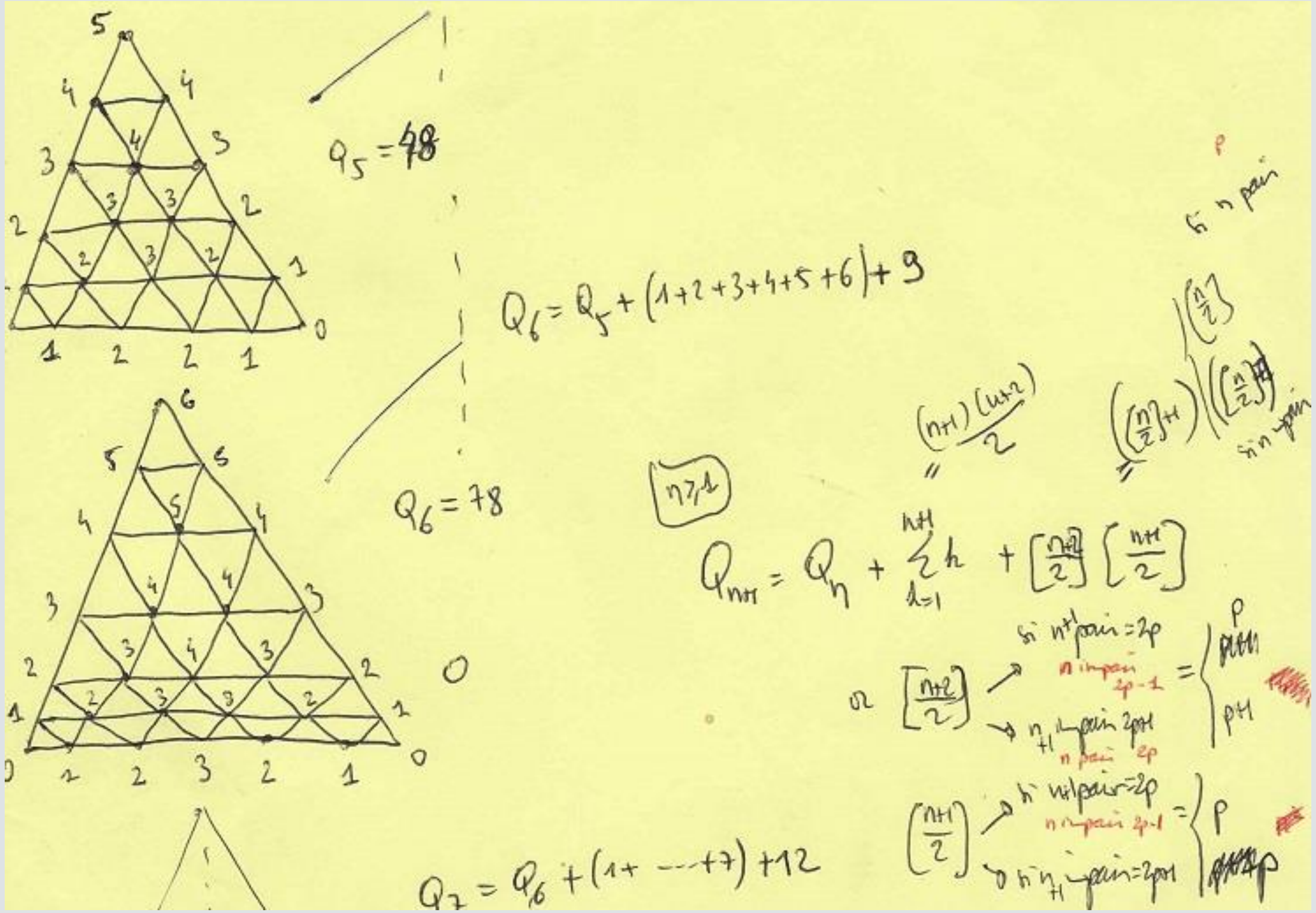


Des triangles dans le triangle: la recherche

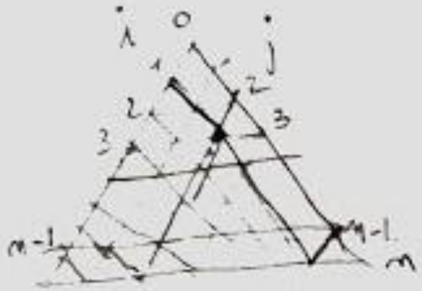




Des triangles dans le triangle: la recherche



Des triangles dans le triangle: la recherche



Sommet (i,j) $i \in [\![0, n-1]\!]$ $j \in [\![0, n-1]\!]$ pour Δ pte en haut

Sommet (i,j) $i \in [\![1, n]\!]$ $j \in [\![1, n]\!]$ pour ∇ pte en bas

Δ (i,j) fixé combien de bases possibles? de $(i+j+1)$ à n soit $(n-i-j)$ bases possibles à condition que $i+j+1 \leq n$

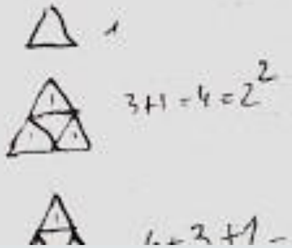
$i+j \leq n-1$

$\underline{\underline{j \leq n-1-i}}$

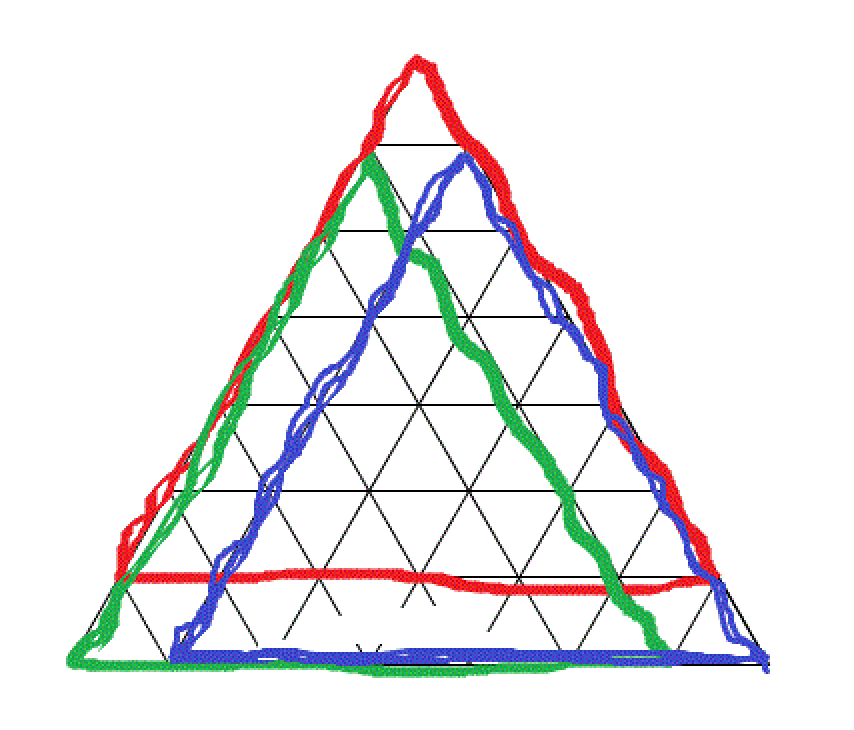
$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1-i}(n-i-j)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\cancel{n(n-i) - \frac{(n-1)n}{2}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - n\sum_{i=0}^{n-1} i = \cancel{\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n-1)}{2} = n^2}$$

$$\sum^{n-1}\left((n-i)(n-i) - (n-1-i)(n-i)\right)$$



Des triangles dans le triangle: la recherche



$$u_n = 3\,(u_{n-1} - u_{n-2}) + 1 + u_{n-3}$$

Formule de récurrence (à prouver!) 1

$$\begin{cases} u_{2p} = 3u_{2p-1} - 3u_{2p-2} + u_{2p-3} + 2, & p \geqslant 2 \quad \cancel{p \geqslant 1} \quad \cancel{p \in \mathbb{N}} \\ u_{2p+1} = 3u_{2p} - 3u_{2p-1} + u_{2p-2} + 1, & p \geqslant 1 \quad \text{~~(en posant~~} \end{cases}$$

(avec $u_0 = 0$)

Des triangles dans le triangle: une réponse

côté 10 : $(1+3+5+7+\dots+17+19) + (1+2+3+\dots+9)$

$+ (1+2+3+\dots+8) + (1+2+3+\dots+7) + (1+2+3+\dots+6)$

$+ (1+2+3+\dots+5) + (1+2+3+4) + (1+2+3) + (1+2) + 1$

$+ (7+6+5+\dots+1) + (5+4+3+2+1) + (3+2+1) + 1$

$= 100 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$

$+ 28 + 15 + 6 + 1$

$= 315$ triangles

Bilan de la première phase: chercher

Des dessins en noir et blanc, en couleurs

Des calculs pas à pas en commençant par les coins, le centre, par bandes,…

Des codages pour repérer les différentes tailles de triangles puis différencier « pointe en haut » et « pointe en bas »

Des tableaux à double entrée (taille du grand triangle / taille des triangles que l’on dénombre) que l’on dédouble

Des calculs de sommes partielles explicitées ou formalisées…

Des triangles dans le triangle: une démarche!

47 ans. Footballeur amateur.

Comment s'organise la recherche?

Est-ce qu'on commence par 1, 2, 3 etc et jusqu'où va-t-on avant de chercher une formule générale?

côté 1 ; côté 2 ; . . . recherche d'une suite logique.

Quels sont les outils utilisés autre que le papier et crayon?

calculatrice.

Combien de temps passé par période de recherche (si le travail a été effectué en plusieurs étapes)?

10 min + 10 min.

Recherche individuelle, en groupe, collaborative?

D'abord individuelle (oubli des triangles à l'envers ▽) → rectification et vérification internet.
puis mise en commun avec qq'un.

Est-ce que les résultats sont vérifiés en les confrontant à d'autres au fur et à mesure?

oui

Quelles sont les questions qui surgissent rapidement?

recherche d'une relation de récurrence

Qui s'est précipité sur Internet et au bout de combien de temps?

pas précipité. Une fois fini et "certain" du résultat " vérification internet

Des triangles dans le triangle

Pour un triangle de côté n, quelles méthodes d’investigation?

Observer en découpant « en bandes »

En découpant le triangle de côté *n* en bandes horizontales on dénombre les triangles unité (de côté1) directement ou en séparant les triangles « pointe en haut » et « pointe en bas » :

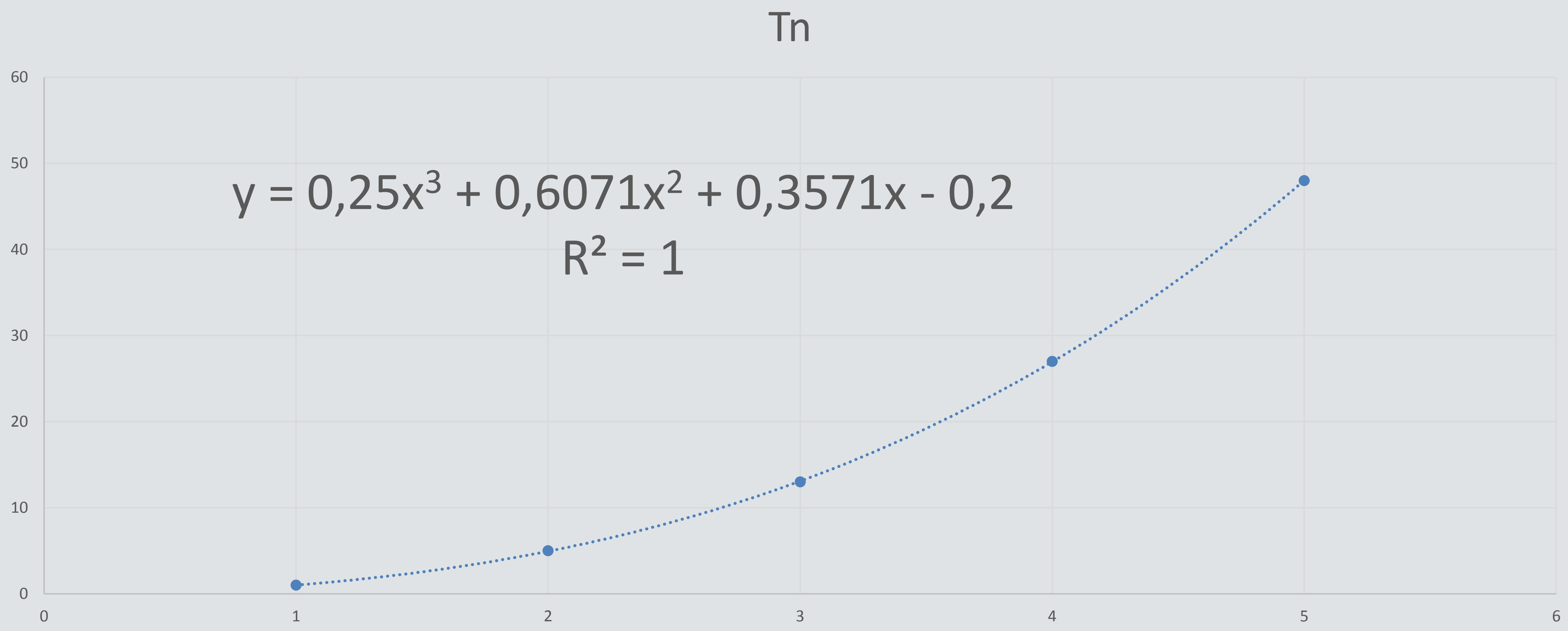
- Sur la bande k il y a k triangles pointe en haut d'où dans le triangle de côté n, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ triangles pointe en haut.
- Sur la bande k, il y a $(k - 1)$ triangles pointe en bas d'où dans le triangle de côté n, $0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 1) = (n - 1)n/2$ triangles pointe en bas, ce qui donne

  $[n(n + 1) + (n - 1)n]/2 =$ $\boldsymbol{n^2}$ **triangles unité**.
- Directement, sur la bande k il y a $(2k - 1)$ triangles unité et $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Observer dans un tableau

Tr		I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9	I 10	totaux	total
T1	Λ	1										1	1
	V	0										0	
T2	Λ	3	1									4	5
	V	1										1	
T3	Λ	6	3	1								10	13
	V	3										3	
T4	Λ	10	6	3	1							20	27
	V	6	1									7	
T5	Λ	15	10	6	3	1						35	48
	V	10	3									13	
T6	Λ	21	15	10	6	3	1					56	78
	V	15	6	1								22	
T7	Λ	28	21	15	10	6	3	1				84	118
	V	21	10	3								34	
T8	Λ	36	28	21	15	10	6	3	1			120	170
	V	28	15	6	1							50	
T9	Λ	45	36	28	21	15	10	6	3	1		165	235
	V	36	21	10	3							70	
T10	Λ	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	220	315
	V	45	28	15	6	1						95	

Chercher un ajustement polynomial



Pourquoi un polynôme de degré 3?

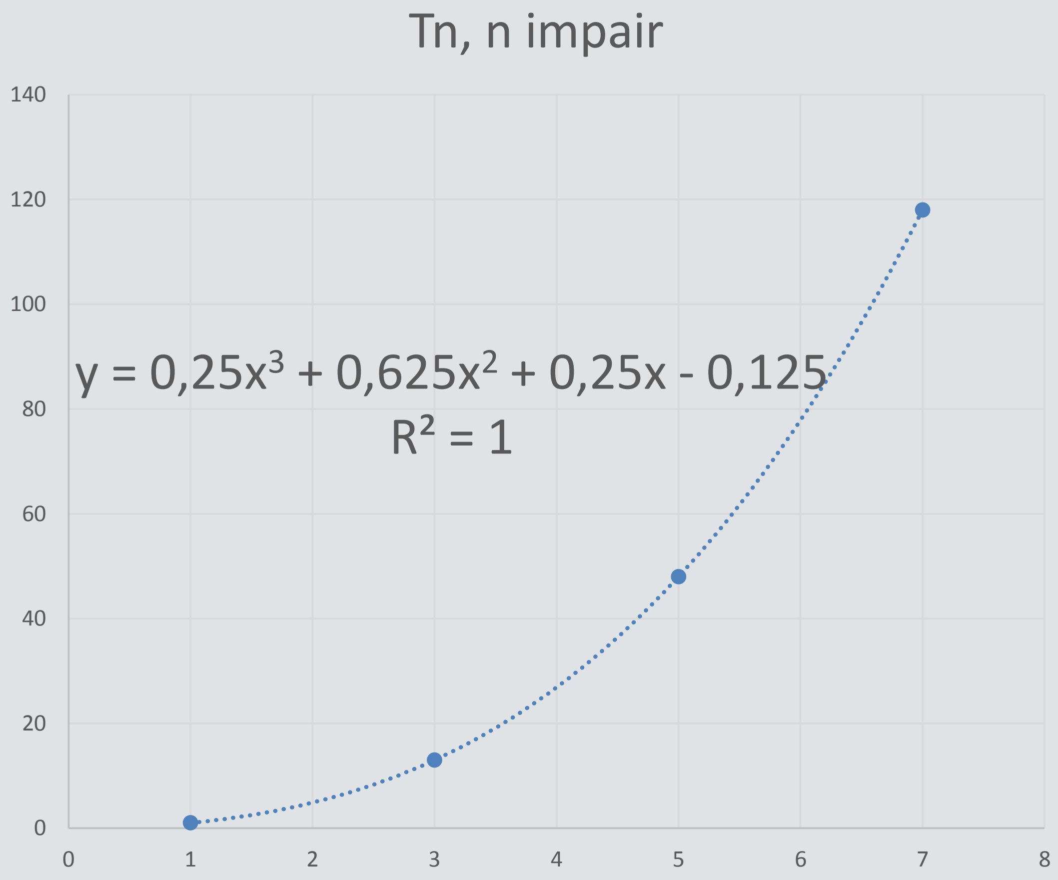
Différences successives sur les 5 premières valeurs…

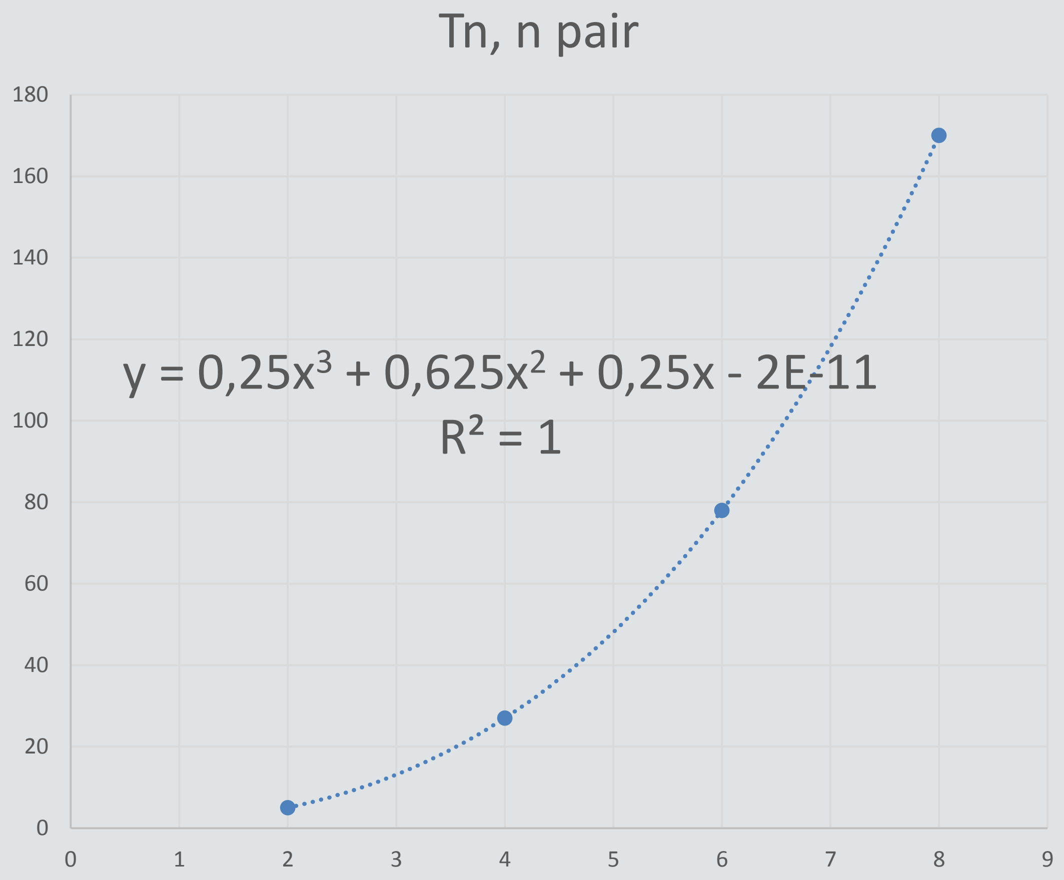
n	Tn	d1	d2	d3
1	1	4	4	2
2	5	8	6	1
3	13	14	7	
4	27	21		
5	48			

Différences successives sur les 7 premières valeurs …

n	Tn	d1	d2	d3
1	1	4	4	2
2	5	8	6	1
3	13	14	7	2
4	27	21	9	1
5	48	30	10	
6	78	40		
7	118			

Extraire les suites de termes pairs puis impairs





En cherchant « la formule» avec 4 termes

Cas *n* impair

```
1 lagrange([1,3,5,7],[1,13,48,118],n)
```

$$(n-1)*((n-3)*(\frac{n-5}{4}+\frac{23}{8})+6)+1$$

```
2 developper((n-1)*((n-3)*((n-5)/4+23/8)+6)+1)
```

$$\frac{n^3}{4}+\frac{5*n^2}{8}+\frac{n}{4}-\frac{1}{8}$$

Cas *n* pair

```
lagrange([2,4,6,8],[5,27,78,170],n)
```

$$(n-2)*((n-4)*(\frac{n-6}{4}+\frac{29}{8})+11)+5$$

```
factoriser((n-2)*((n-4)*((n-6)/4+29/8)+11)+5)
```

$$\frac{n*(n+2)*(2*n+1)}{8}$$

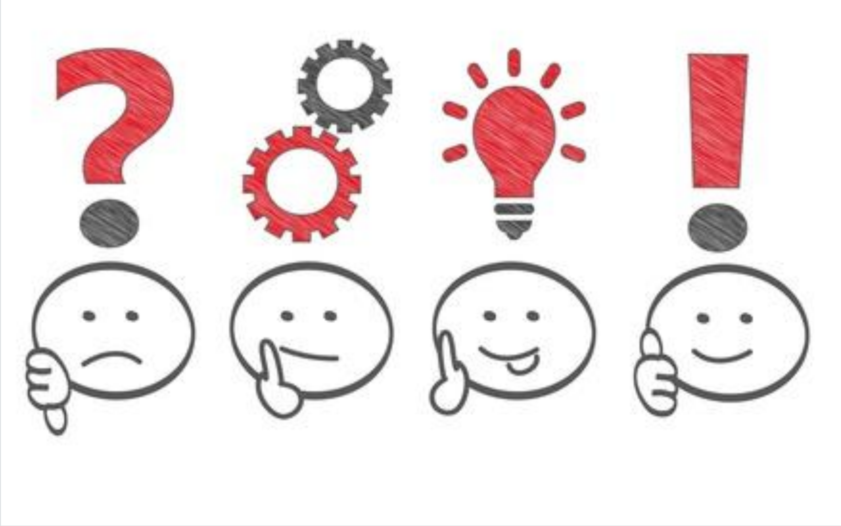
```
developper(n*(n+2)*(2*n+1)/8)
```

$$\frac{n^3}{4}+\frac{5*n^2}{8}+\frac{n}{4}$$

Conclusion de l’investigation

La démarche d’investigation a permis ici de trouver une réponse à notre problème (grâce aux dessins, codages, tableaux, méthode des différences, graphiques, calcul formel…)

Est-ce une aide à la démonstration?



Des triangles dans le triangle

Quelle démonstration?

U(*n*) nombre de triangles « pointe en haut »

Les triangles pointant vers le haut ont la « même forme » que le plus grand triangle de côté *n*.

Sur la ligne *k*, il y a autant de bases de triangles que de choix possibles de 2 points parmi (*k* + 1) points soit

$$\binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$U(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

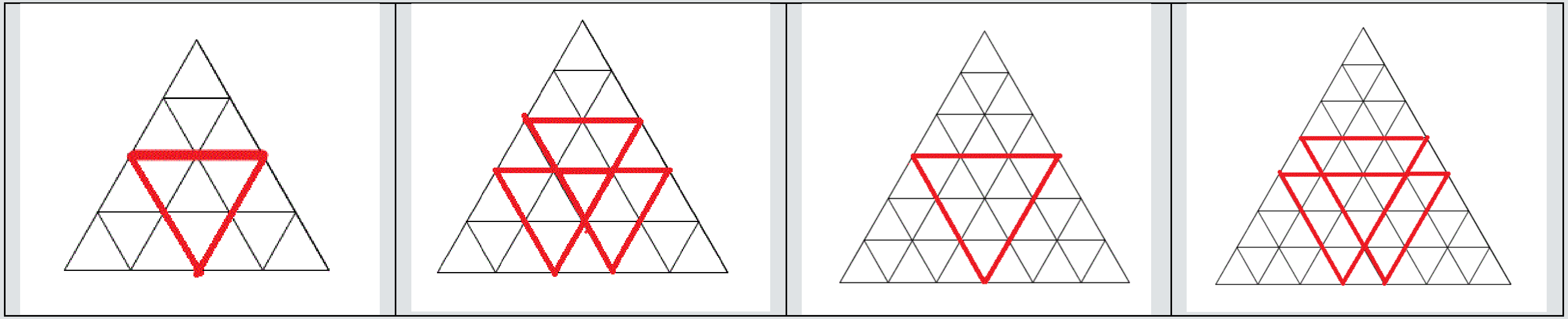
U(*n*) nombre de triangles « pointe en haut »

Les triangles pointant vers le haut ont la « même forme » que le plus grand triangle de côté *n*.

$$\boldsymbol{U(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

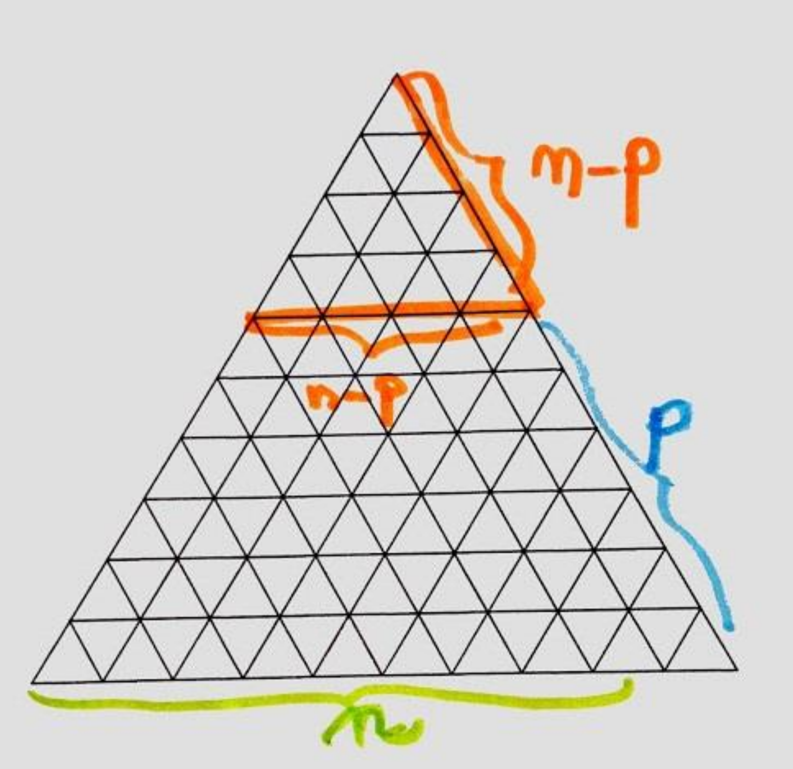
V(n) nombre de triangles pointe en bas

Observation 1: **Les triangles pointant vers le bas** ont une taille maximale qui dépend de la parité de n



$V(n)$ nombre de triangles pointe en bas

Observation 1: **Les triangles pointant vers le bas** ont une taille maximale qui dépend de la parité de n



Condition: $n - p \geq p$

soit $2p \leq n$

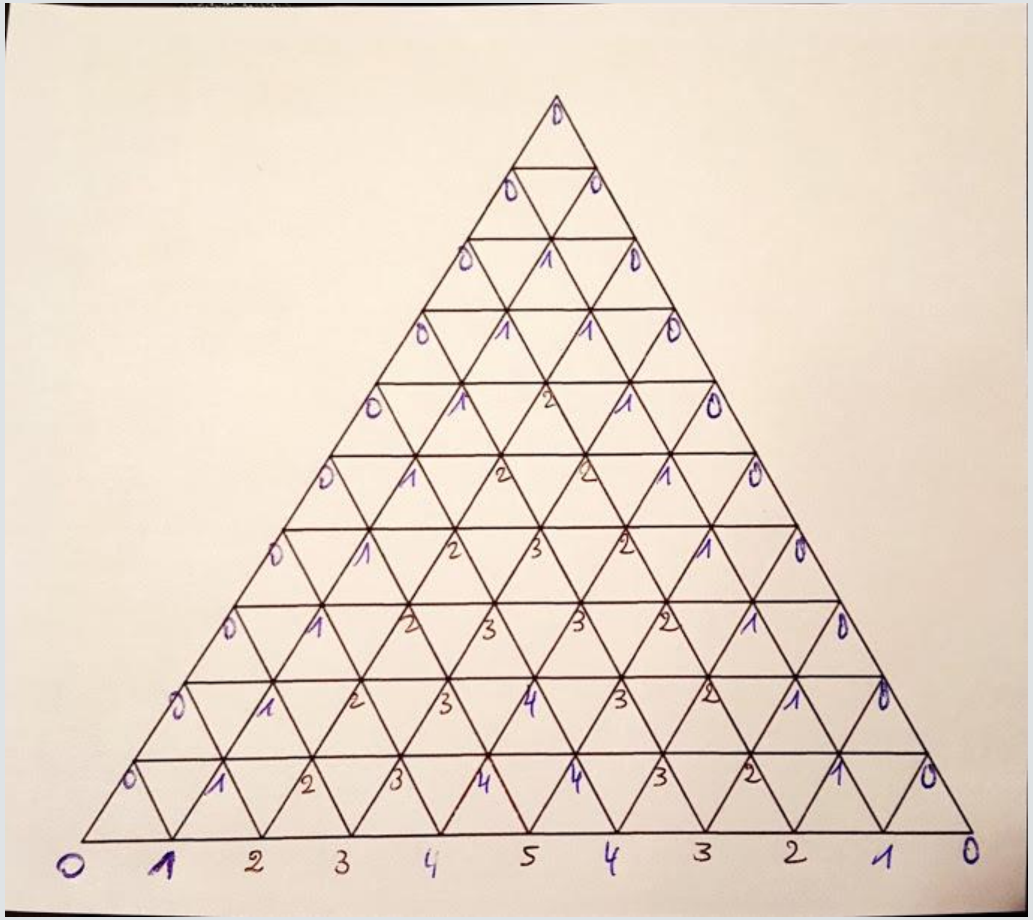
si n est pair, $p \leq n/2$

si n est impair , $p \leq (n - 1)/2$

V(*n*) nombre de triangles pointe en bas

Observation 2: codage

Sous chaque point, considéré comme la pointe d'un triangle « tête en bas », inscrivons le nombre de triangles tête en bas dont c'est la pointe.

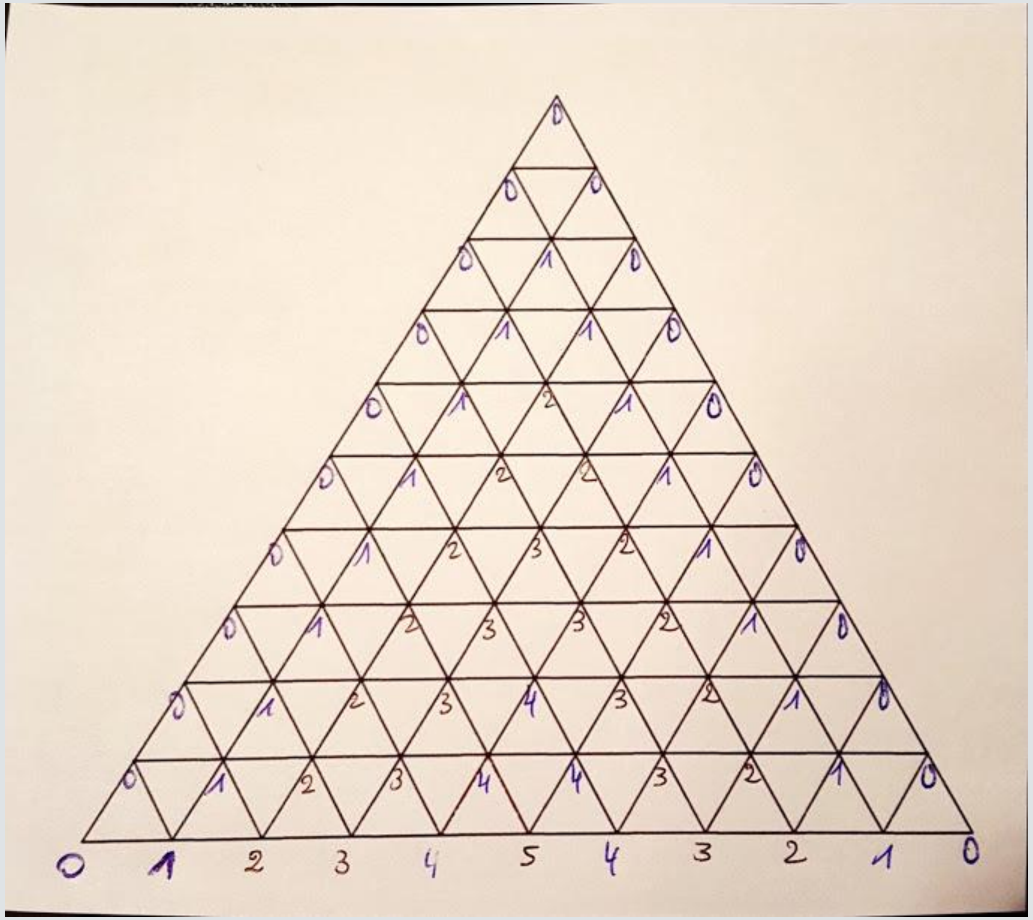


V(*n*) nombre de triangles pointe en bas

Observation 2: codage

Chaque nombre est égal à la « distance » suivant le maillage du point au bord le plus proche du grand triangle (taille max du triangle pointe en bas).

D’où des lignes de 0, 1, 2 etc de la forme Λ qui se réduisent à un point si n est pair.



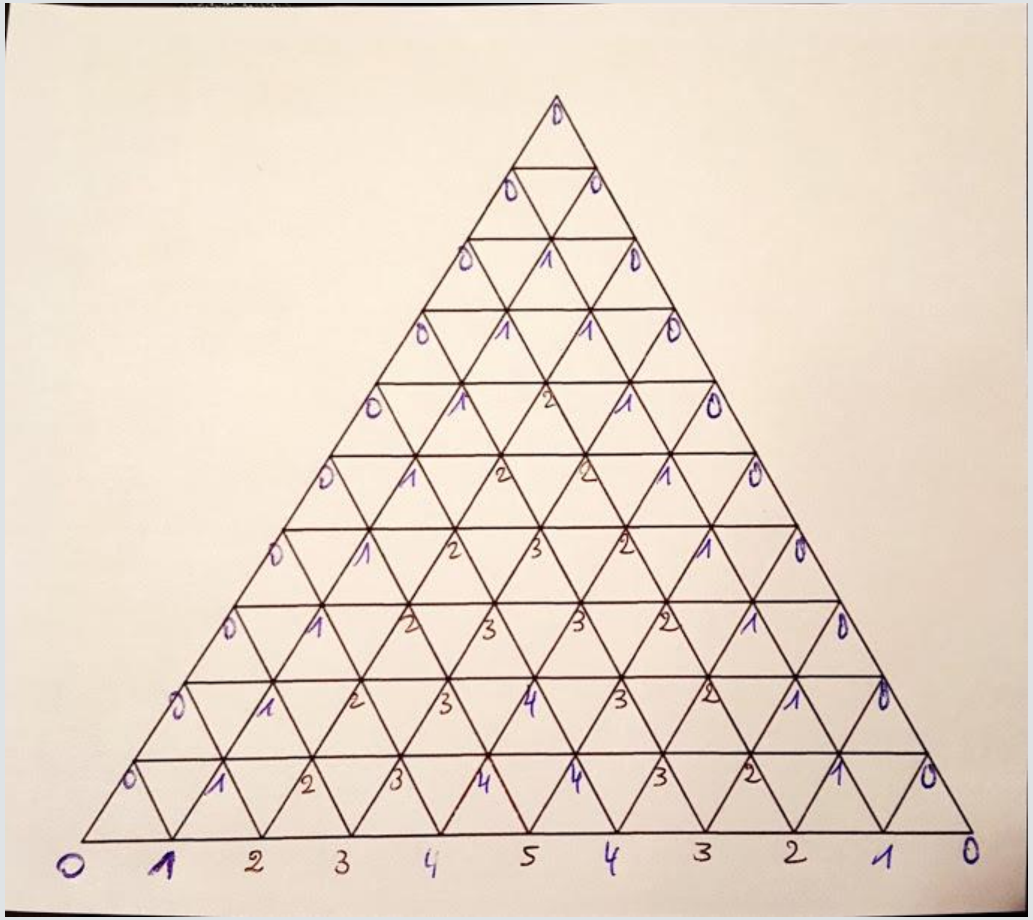
V(*n*) nombre de triangles pointe en bas

La ligne Λ de k, est de longueur 2n – 4k et comporte 2n – 4k +1 points sommets chacun de k triangles (k > 0)

Ceci est valable jusqu'à k = p si n = 2p et également jusqu'à k = p si n = 2p + 1. Plus précisément:

. si n = 2p, la ligne Λ de p est réduite à 1 point sommet de p triangles

. si n = 2p + 1, la ligne Λ de p est réduite à 3 points sommets chacun de p triangles



V(n) nombre de triangles pointe en bas

La ligne Λ de k, est de longueur 2n – 4k et comporte 2n – 4k +1 points sommets chacun de k triangles (k > 0)

Ceci est valable jusqu'à k = p si n = 2p et également jusqu'à k = p si n = 2p + 1. Plus précisément:

. si n = 2p, la ligne Λ de p est réduite à 1 point sommet de p triangles

. si n = 2p + 1, la ligne Λ de p est réduite à 3 points sommets chacun de p triangles

<u>Si n = 2p</u>

$$V(2p) = \sum_{k=1}^{k=p} k(4p - 4k + 1)$$

$$= 4p \sum_{k=1}^{k=p} k - 4 \sum_{k=1}^{k=p} k^2 + \sum_{k=1}^{k=p} k$$

$$= \frac{2p(2p+2)(4p-1)}{24}$$

$$\boldsymbol{V(n) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}}$$

V(n) nombre de triangles pointe en bas

La ligne Λ de k, est de longueur 2n – 4k et comporte 2n – 4k +1 points sommets chacun de k triangles (k > 0)

Ceci est valable jusqu'à k = p si n = 2p et également jusqu'à k = p si n = 2p + 1. Plus précisément:

. si n = 2p, la ligne Λ de p est réduite à 1 point sommet de p triangles

. si n = 2p + 1, la ligne Λ de p est réduite à 3 points sommets chacun de p triangles

<u>Si n = 2p + 1</u>

- V(2p + 1) =

$$\sum_{k=0}^{k=p} k(4p+2-4k+1)$$

$$= 4p\sum_{k=0}^{k=p} k - 4\sum_{k=0}^{k=p} k^2 + \sum_{k=0}^{k=p} 3k$$

$$= \frac{2p(2p+2)(4p+5)}{24}$$

$$\boldsymbol{V(n) = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}}$$

Vers la formule finale

T(n) = U(n) + V(n)

- **Si n est pair**

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} = \frac{n(n+2)(6n+3)}{24}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}}$$

- **Si n est impair**

- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} = \boldsymbol{\frac{(n+1)(6n^2+9n-3)}{24}}$

Vers la formule finale

Les expressions semblent différentes mais si l'on développe :

$$\boldsymbol{si\ n\ est\ pair} \qquad \boldsymbol{T(n)} = \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n}$$

$$\boldsymbol{si\ n\ est\ impair} \qquad \boldsymbol{T(n)} = \frac{6n^3 + 15n^2 + 3n - 3}{24} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n - \frac{1}{8}}$$

Ces nombres sont-ils bien entiers?

La formule finale!

Pour tout entier naturel *n*,

$$\boldsymbol{T(n) = Ent\left[\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{4}n\right] = Ent\left[\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}\right]}$$

Attention, ce n’est pas fini….

Démonstration plus formelle… inspirée par le tableau…

Soit *Th* (*n*, *p*) le nombre de triangles « pointe en haut » de type *p* à l'étape *n*

***Th* (1, 1) = 1 et *Th* (n, 1) = *Th* (n-1, 1) + n   d'où *Th* (n, 1) = $\frac{1}{2}$ n(n+1).**

D'autre part, T*h* (n, p) = *Th* (n – 1, p – 1) = *Th* (n – 2, p – 2)= …

= *Th* (n – p + 1, 1)

d'où

$$Th(n,p) = \frac{1}{2}(n-p+1)(n-p+2)$$

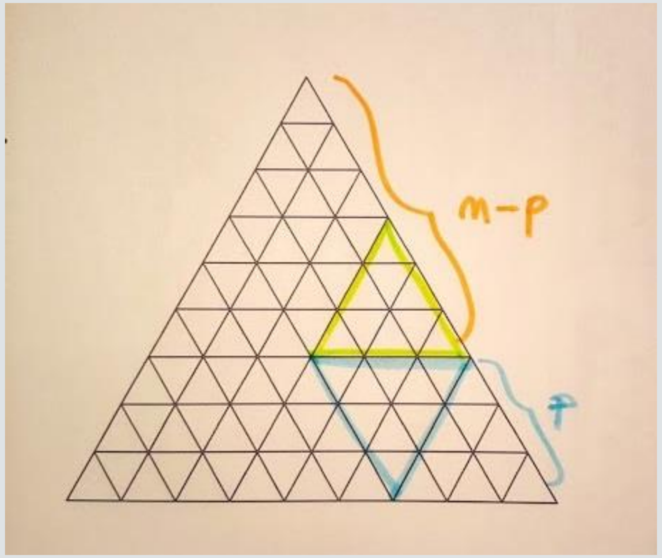
$$Th(n) = \sum_{p=1}^{n} Th(n,p) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Démonstration plus formelle

Soit $Tb(n, p)$ le nombre de triangles « pointe en bas» de type p à l'étape n

pour n pair une valeur maximale de p égale à n/2

Et pour n impair, une valeur maximale de p égale à (n – 1)/2



$Tb\ (n, p) = Th\ (n\text{-}p, p)$

et comme on connait Th….

Démonstration plus formelle

$$Tb\,(n,p) = Th(n-p,p) = \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)}{2}$$

Pour *n* pair, *n* = 2*m*

$$Tb(n) = Tb(2m) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}(2m-2p+1)(2m-2p+2) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Pour *n* impair, *n* = 2*m* +1

$$Tb(n) = Tb(2m+1)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}(2m-2p+2)(2m-2p+3) = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}$$

Même calcul pour terminer que précédemment!

Chercher, investiguer, prendre des initiatives…

Est-ce une aide à la démonstration?

Comment évaluer?