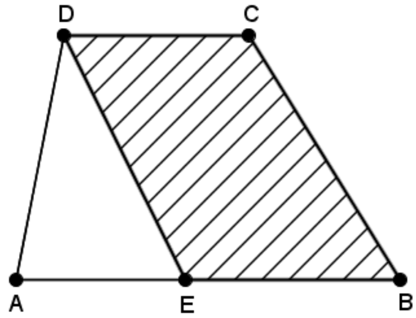
Une sélection d'énoncés du rallye mathématiques de Lyon

2013 – Niveau 1 - La partage du gâteau

Les deux classes gagnantes du rallye 2013 auront à se partager en parts égales un gâteau. Celui-ci a la forme d'un trapèze ABCD dont les côtés parallèles ont pour longueurs AB = 54 cm et CD = 26 cm.

À quelle distance de A doit-on placer un point E entre A et B de façon que le segment [DE] partage le gâteau en deux parties de même aire ?

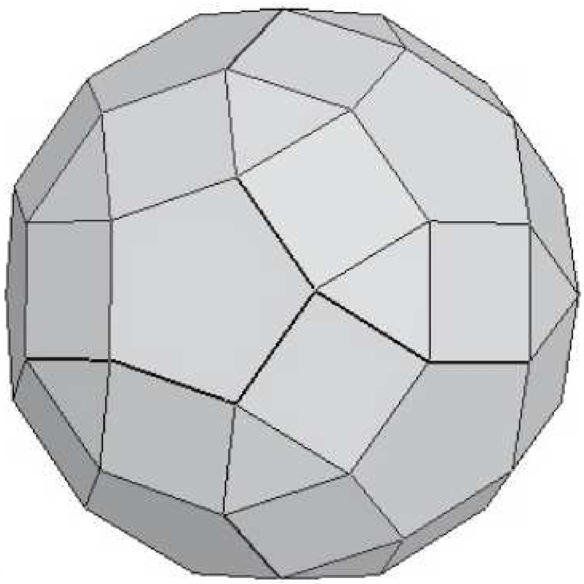


2015 – Niveau 1 – Un ballon extraordinaire

Ce ballon extraordinaire représenté ci-contre est formé de 12 pentagones réguliers entourés de carrés et de triangles équilatéraux.

Combien y a-t-il de triangles équilatéraux et de carrés?

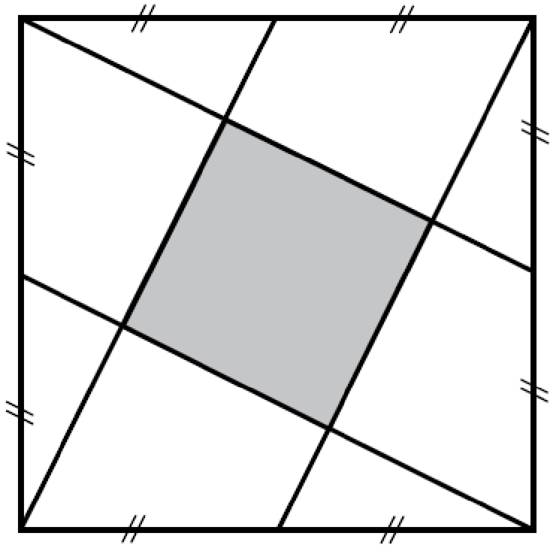
(La disposition des faces les unes par rapport aux autres est la même sur toute la surface du ballon)



2010 – Niveau 1 – Carrés

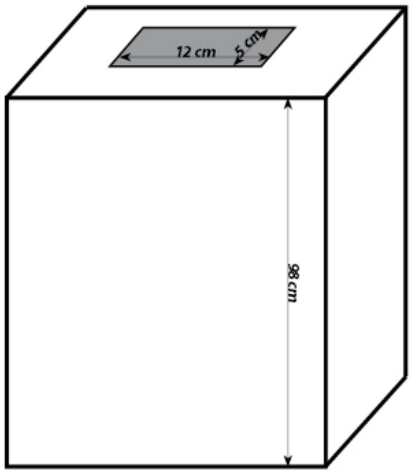
Le grand carré a pour côté 2 mètres.

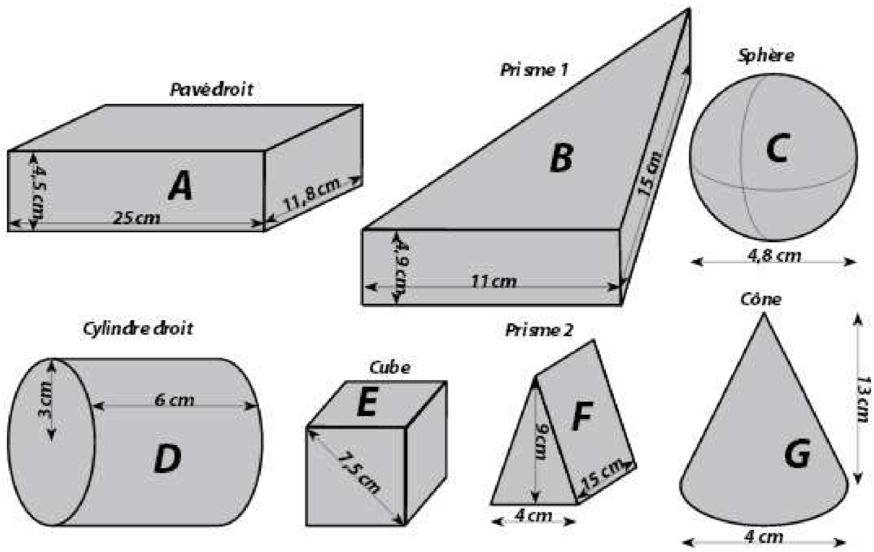
Quelle est l'aire du petit carré central ?



2013 – Niveau 1 – Les solides

Voici sept solides (les dessins ne sont pas à l'échelle) :



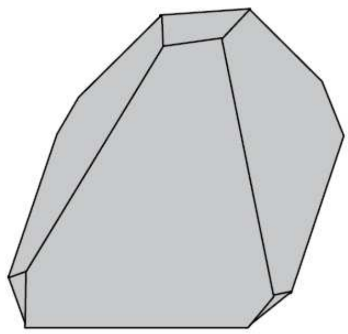


La boite ci-dessus possède une seule ouverture. Celle-ci est de forme rectangulaire, et mesure 12 cm sur 5 cm.
Indiquer pour chacun des sept solides (désigné chacun par une lettre) s'il peut ou non entrer dans la boite par cette ouverture.

2011 – Niveau 1 – La pyramide tronquée

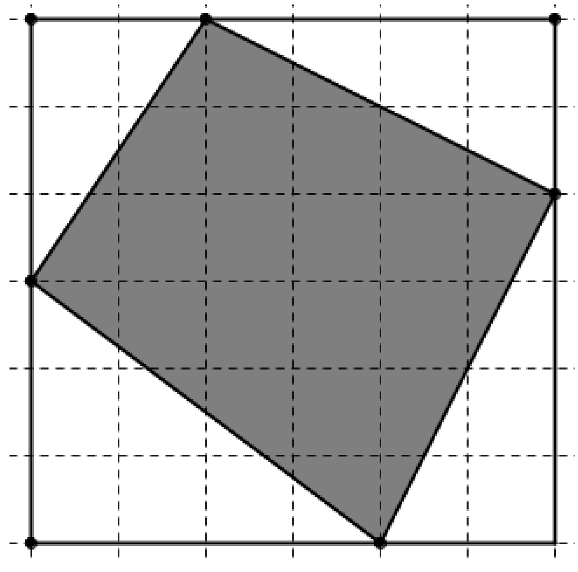
Mathias trouve une pyramide à base carrée en bois dans le grenier de son grand-père. Les sommets de cette pyramide étant légèrement émoussés, Mathias décide de tous les couper proprement à l'aide d'une scie.

Combien le solide obtenu a-t-il d'arêtes, de sommets et de faces ?



2006 – Niveau 1 – Morceaux de carrés

Quelle est la fraction du carré représentée par la partie foncée ?



2013 – Niveau 1 – Drôle de familles :

La famille Rectangle est composée de tous les rectangles qui ont pour aire 105 m² et dont les mesures des côtés sont des nombres entiers de mètres.

Donner, en ordre croissant et en mètres, les différents périmètres des membres de la famille Rectangle.

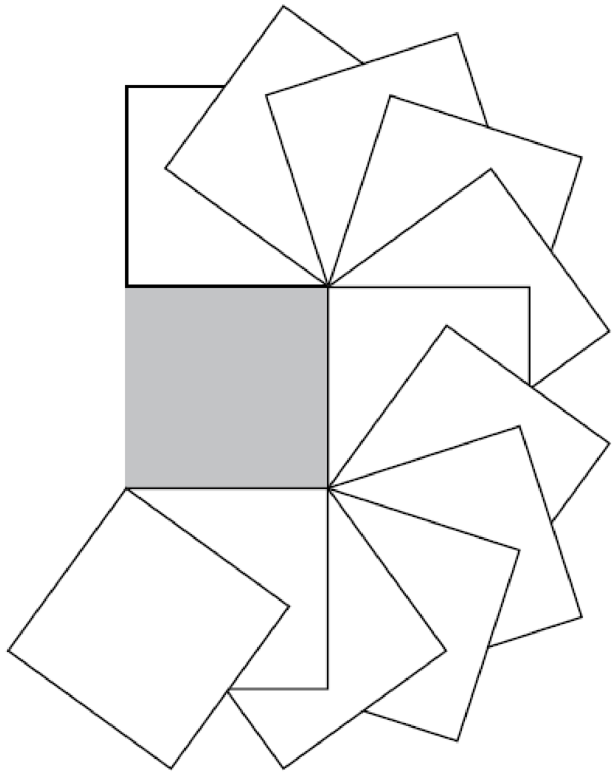
2007 – Niveau 2 – Des carrés qui tournent

Le carré gris est fixe et mesure 4 cm de côté.

Le carré blanc a les mêmes dimensions et «tourne» autour du carré gris jusqu'à revenir à sa position de départ.

Dessiner la trajectoire du point I centre du carré blanc.

Calculer la longueur de cette trajectoire.



2016 – Niveau 2- Un ruban sicilien

Un ruban de papier est divisé en une longue suite de cases. Un nombre entier est écrit dans la première case.

- Si le nombre est pair, on écrit sa moitié dans la case suivante.
- Si le nombre est impair, on le multiplie par 3 puis on ajoute 1 pour obtenir le nombre à écrire dans la case suivante.

Et ainsi de suite à partir du dernier nombre écrit...

Exemple :

6	3	10	5	...											

Si le premier nombre écrit est 17, quel est le 2016ème nombre écrit sur le ruban ?

2008 – Niveau 2 – Multiplication à la russe

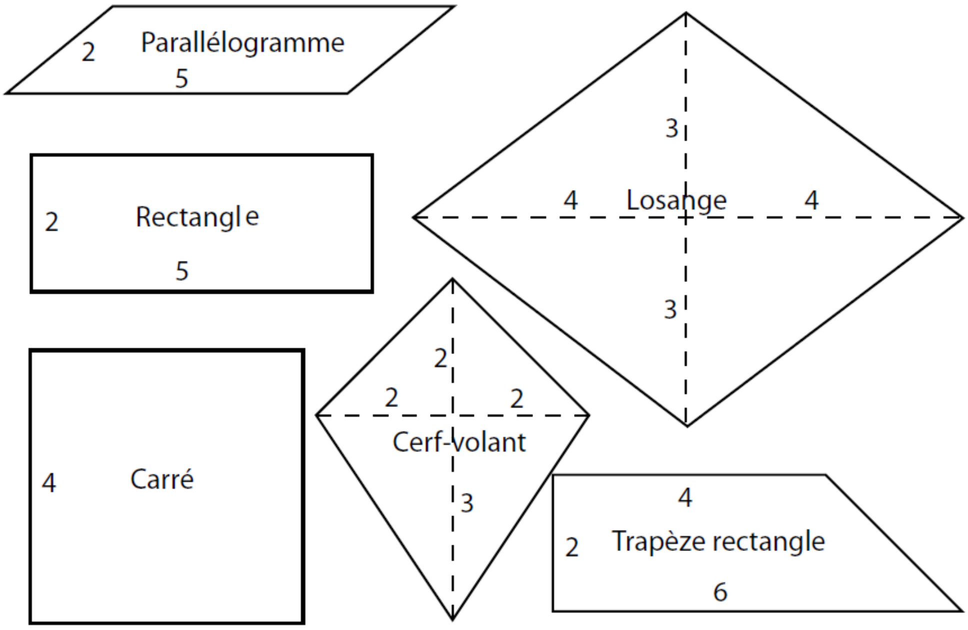
Il y a bien longtemps déjà, voici comment on calculait 236 × 307.

Disposer de la même manière la multiplication de 294 par 527.

~~236~~	~~307~~
~~118~~	~~614~~
59	1228
29	2456
~~14~~	~~4912~~
7	9824
3	19648
1	39296
	72452

236 x 307 = 72452

2008 – Niveau 3 – Quadrilatères



Les quadrilatères ci-contre ont été dessinés par 6 personnes différentes, et de 6 couleurs différentes. Les mesures indiquées sont en cm.

Retrouver qui a dessiné chaque quadrilatère et avec quelle couleur à partir des renseignements suivants :

* Le cerf-volant est orange.
* Etienne et Claire ont dessiné des quadrilatères dont le périmètre en cm n'est pas un entier.
* Claire a utilisé le crayon noir.
* Bruno, Claire et Etienne ont dessiné des quadrilatères de même aire.
* François a dessiné un quadrilatère dont l'aire en cm² et le périmètre en cm sont égaux.
* L'aire du quadrilatère jaune est supérieure à celle du quadrilatère dessiné par Etienne.
* Le quadrilatère rouge et le vert ont le même périmètre.
* Le quadrilatère bleu dessiné par Anne a un périmètre plus grand que celui dessiné par Daniel.
* François voulait prendre le crayon rouge, mais Daniel l'utilisait déjà.

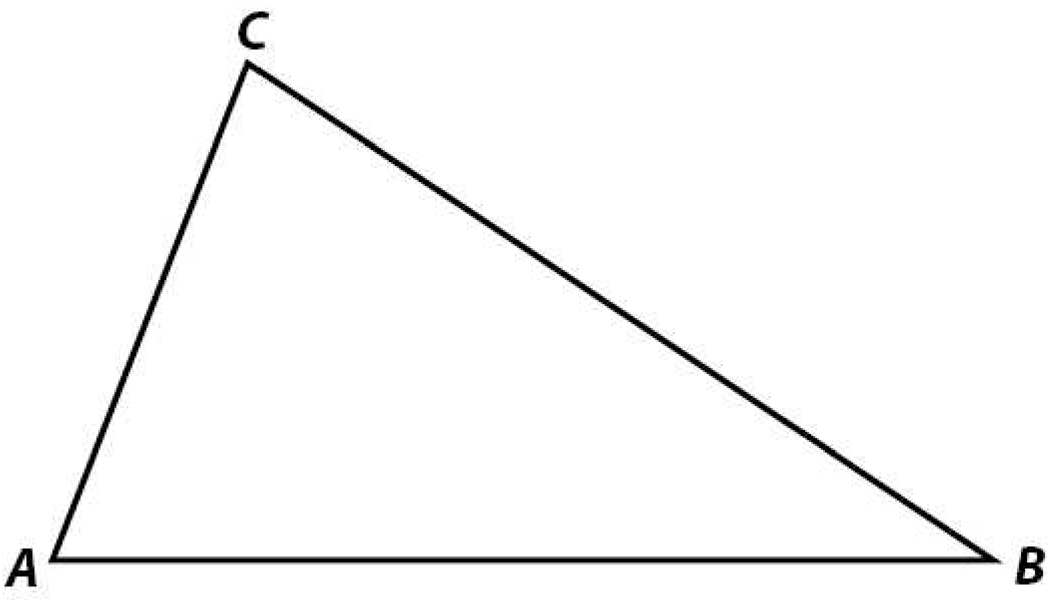
2009 – Niveau 3 - Triangle original

Amélie a trouvé un triangle ABC non équilatéral dans lequel la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B sont concourantes.

Dessiner un triangle ABC non équilatéral ayant cette propriété.

Amélie regarde le triangle ci-dessous. Elle prend ses instruments de géométrie.

Par une simple mesure, et sans rien tracer, elle affirme au bout de 10 secondes que, dans ce triangle, la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B ne sont pas concourantes.



Qu'a-t-elle mesuré ?

*Dans une première partie, le point de vue de départ sera **une notion à travailler** et des exemples d’énoncés choisis pour répondre à ce besoin. Dans une seconde partie, nous partirons d’exercices du rallye et nous proposerons une suite à ces exercices pour travailler des notions du programme.*

1ère partie

Travail sur les quadrilatères + jeu et math/français

2008 – Niveau 3 – Quadrilatères

En plus des propriétés sur les quadrilatères, on travaille aussi la lecture des énoncés et la logique.

C’est l’occasion de montrer aux élèves comment on résout un logigramme, avec des tableaux comme celui-ci :

		Quadrilatère						Couleur					
		N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6	Jaune	Orange	Rouge	Bleu	Vert	Noir
Prénom	Anne												
	Bruno												
	Claire												
	Daniel												
	Etienne												
	François												
Couleur	Jaune												
	Orange												
	Rouge												
	Bleu												
	Vert												
	Noir												

On peut poursuive ce travail par un travail sur des jeux de logique, pourquoi pas en faire faire à des élèves sur des thèmes donnés. Essayez tout d’abord d’en faire un vous-même avec une base simple, cela n’a rien d’évident.

On peut prendre pour base celui-ci trouvé sur le site homéomath :

Trois mathématiciens :

Eratosthène, Archimède et Apollonius sont trois mathématiciens nés avant J.C en 287,276 ou 262 dans les trois villes Perge, Syracuse et Cyrène.

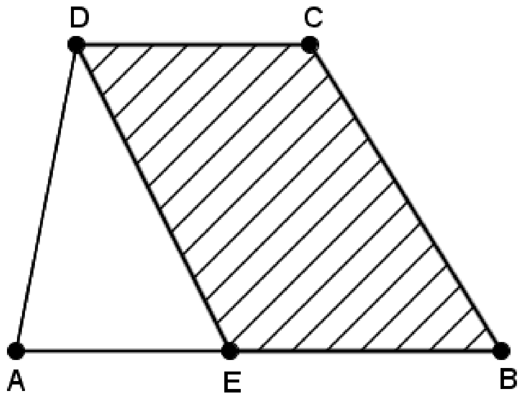
En 276 avant J.C. à Cyrène naquit l'un d'entre eux mais ce n'est pas Archimède.

Apollonius est né à Perge, mais ce n'est pas le plus ancien des trois.

Retrouver l’année de naissance et la ville de chacun des mathématiciens.

2013 – Niveau 1 - La partage du gâteau

Travailler $\boxed{\text{la mise en équation et la résolution d'équation ou d'inéquation du premier degré.}}$



Le travail peut se faire au préalable à l'aide du logiciel géogébra qui donne une réponse en faisant calculer les aires des polygones AED et EBCD. (On peut changer d'échelle sur géogébra)

Une façon de résoudre cette énigme est de poser AE = x.
On note h la hauteur du triangle AED c'est aussi celle du trapèze ABCD et du trapèze EBCD.

L'aire du triangle AED est $\frac{xh}{2}$.

L'aire du trapèze EBCD est $\frac{h(26+54-x)}{2}$ (formule du trapèze : moyenne des deux bases à multiplier par la hauteur)

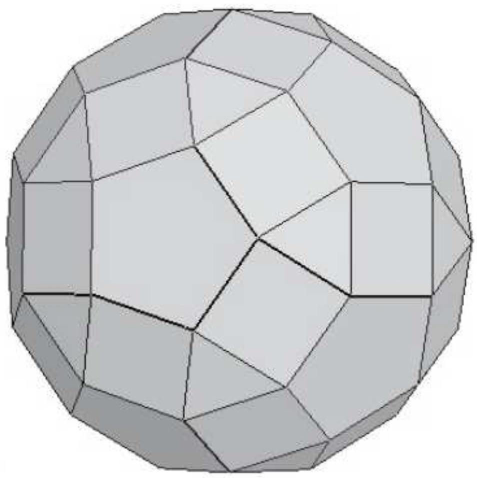
Pour avoir un partage équitable, il faut : $\frac{xh}{2} = \frac{h(26+54-x)}{2}$

On a donc $x = 80 - x$ donc $x = 40$ cm.

Géométrie dans l'espace

2015 – Niveau 1 – Un ballon extraordinaire

Une observation d'un joli solide peut changer des exemples traditionnels.



La réponse est qu'il y a 20 triangles et 30 carrés. Ce qui fait 62 faces en tout.
Faire faire un patron serait donc très fastidieux à moins d'utiliser un logiciel mais peut constituer un défi à proposer à de bons élèves.
Si on fait en plus compter le nombre d'arêtes et de sommets, on obtient 120 arêtes et 60 sommets.
Ce solide est un solide d'Archimède et est appelé le rhombicosidodécaèdre.
Un autre défi à proposer est de reproduire la figure. Cela a été à l'origine de la jolie affiche du rallye 2016 de l'académie de Lyon faite par une élève de 2$^{\text{nde}}$.

2013 – Niveau 1 – Les solides

Pour répondre à la question posée, les élèves devront parfois faire « tourner » les solides et utiliser une fois le théorème de Pythagore.
Pour **revoir l'ensemble des solides usuels**, ceci est un bon exercice.

On peut d'ailleurs demander aux élèves de nommer les solides si on ne laisse pas les noms donnés par l'énoncé ; On peut aussi demander pour les solides A, B, E et F de compter le nombre de faces, de sommets et d'arêtes.

Le volume peut aussi être demandé aux élèves pour faire réviser les différentes formules de volume.

Voici une correction de l'énoncé initial, avec toutes les mesures en cm.

A rentre : La face 4,5 sur 11,8 passe par l'ouverture 5 sur 12.

B rentre : La face 4,9 sur 11 passe par l'ouverture 5 sur 12.

C rentre : La sphère passe dans un carré de 4,8 sur 4,8, plus petit que l'ouverture 5 sur 12.

D ne rentre pas : La face circulaire a un diamètre de 6, plus grand que le 5 de l'ouverture. Et la hauteur de 6 empêche de la faire entrer latéralement.

E ne rentre pas : Un carré de diagonale 7,5 a un côté de mesure $7{,}5/\sqrt{2} \approx 5{,}3$ qui est plus grand que le 5 de l'ouverture. On peut ici utiliser le théorème de Pythagore.

F rentre : La face triangulaire 4 sur 9 passe par l'ouverture 5 sur 12.

G rentre : La face circulaire passe dans un carré de 4 sur 4, plus petit que l'ouverture 5 sur 12.

2ème partie

2016 – Niveau 2- Un ruban sicilien

On peut donner l'énoncé suivant pour les élèves :

1. Résoudre l'énigme
2. Ecrire un algorithme en langage naturel qui donne le résultat de l'énigme.

On pourra noter :

- N, le numéro de la case dont on cherche le nombre (pour l'énoncé N = 2016)
- I, le numéro écrit dans la première case (pour l'énoncé I = 17)
- U le nombre écrit dans une case de numéro donné

3. Programmer l'algorithme sur l'ordinateur pour vérifier la réponse donnée à la question 1.

La réponse est 2.

On travaille en algorithmique la boucle pour et le test de parité à l'aide d'une instruction conditionnelle.

Un algorithme possible est :

Entrée :	Donner I Donner N
Traitement :	U prend la valeur I Pour k allant de 1 à N faire Si U est pair U prend la valeur U/2 Si U est impair U prend la valeur 3U + 1 Fin pour
Sortie :	Afficher U

Pour en faire un énoncé pour travailler en plus des algorithmes, les suites, on peut proposer aux élèves l'exercice suivant :
1. Résoudre l'énigme.
2. n est un entier naturel. On note U_n le numéro écrit sur le ruban sicilien à la case numéro n. Ainsi U_1 est le premier nombre écrit.
a) Donner une définition de la suite (U_n) par récurrence.
b) Traduire la question de l'énoncé du ruban sicilien en une question portant sur la suite (U_n).
c) Ecrire un algorithme qui donne le résultat de l'énigme puis le programmer sur l'ordinateur pour qu'il donne le résultat de l'énigme.
d) Modifier l'algorithme de façon à ce que l'algorithme donne les 100 premiers termes de la suite (U_n) et programmer cet algorithme. Que remarque-t-on ?
e) La suite définie dans cet exercice est appelée suite de Syracuse. Faire des recherches sur la conjecture de Syracuse.

Un scénario possible avec les élèves peut être de donner l'énigme seule tout d'abord et de la faire lire et chercher quelques minutes seulement avant de faire un premier point avec les élèves. On peut alors s'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé et écouter les premières pistes des élèves. L'idéal est que si un élève a trouvé un résultat, il soit assez peu convaincant et qu'il soit nécessaire pour que tout le monde soit d'accord d'apporter une autre preuve.
Si un élève fait remarquer que des termes se répètent, on peut demander à toute la classe de faire directement le 2ème algorithme pour l'observer sur les 100 premiers termes de la suite.
C'est cette remarque qui fait résoudre l'énigme initialement. On commence par chercher les résultats des premières cases du ruban :

17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1

Et on remarque qu'à partir de la 11ème case on tombe sur les termes 4, 2, 1 qui se répètent.
Ainsi une fois les 10 premières cases complétées, il reste 2006 cases à remplir avec 4, 2, 1.
2007 est un multiple de 3. On arrive donc au nombre 2.

En changeant le terme initial, on peut observer que l'on retrouve encore cette série de nombres 4, 2, 1.
On peut aussi travailler avec les élèves sur un algorithme « durée de vol » c'est-à-dire suivant le terme initial, donner le rang à partir duquel on trouve la première fois 1 comme terme. Il s'agit de travailler ici sur la suite de Fibonacci dont on peut faire chercher l'histoire et les recherches actuelles.

Algorithmes

2008 – Niveau 2 – Multiplication à la russe

En essayant de comprendre pourquoi cette méthode donne le bon résultat, on retrouve la conversion d'un nombre en code binaire. On programme alors un algorithme qui va donner à partir d'un nombre donné son codage en binaire.

Voici un exercice possible à donner avec un habillage supplémentaire :

Léna aime les mathématiques, maîtrise bien les techniques de l'addition mais ne parvient pas à se souvenir de mes tables de multiplication. Elle ne connait que celle de 2 ! Ainsi, elle sait effectuer toutes les multiplications et les divisions euclidiennes (avec quotient et reste entier) par 2 mais pas avec les autres nombres. Sa grand-mère essaye de l'aider. Voici ce qu'elle a écrit pour multiplier 236 par 307 (on donne alors la même opération que celle d' l'énoncé initial)

Léna a montré ce résultat à sa maîtresse qui lui a indiqué que c'était ainsi que les russes calculaient les produits au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle. »

1. Disposer de la même manière la multiplication de 294 par 527.
2. Léna essaie de comprendre pourquoi cela marche et elle parvient à écrire ceci :

43	26	$43\times 26=(2\times 21+1)\times 26=21\times(2\times 26)+26=21\times 52+26$
21	52	$21\times 52=(2\times 10+1)\times 52=10\times(2\times 52)+52=10\times 104+52$
~~10~~	~~104~~	$10\times 104=(2\times 5)\times 104=5\times(2\times 104)=5\times 208$
5	208	$5\times 208=(2\times 2+1)\times 208=2\times(2\times 208)+208=2\times 416+208$
~~2~~	~~416~~	$2\times 416=832$
1	832	

$$\boxed{43\times 26=26+52+208+832=1118}$$

Faire de même pour le produit de 87 par 85

3. Léna écrit un algorithme en langage naturel qui donnera le résultat et les différentes étapes de la multiplication à la russe. Elle l'imprime pour le montrer à son père informaticien mais sa sœur a fait un peu de coloriage (… sur l'algorithme) et quelques instructions sont effacées.

Variables :	a, b, … sont des nombres
Initialisation	Donner … et … m prend la valeur 0
Traitement	Tant que a > 0 Si … alors m = m + b Afficher a et b a prend la valeur partie entière de (a/2) b prend la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher m

Réécrire les lignes qui ont été coloriées. (Réponses : a, b, m sont des nombres / Si a est impair alors m = m + b / b prend la valeur 2b)

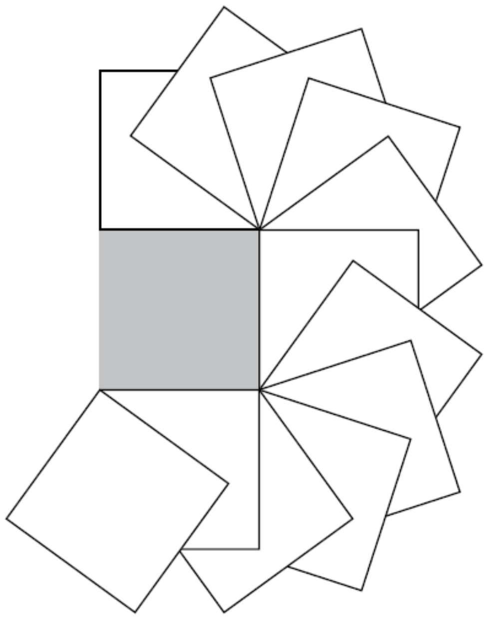
4. Le père de Léna, informaticien ne connait pas la multiplication « à la russe ». Il indique pourtant que cette méthode est une méthode pour coder un nombre en

base 2. Il explique : « Le système binaire est un système de numération utilisant la base 2. On nomme couramment bit (de l'anglais binary digit, soit « chiffre binaire ») les chiffres de la numération binaire positionnelle. Ceux-ci ne peuvent prendre que deux valeurs, notées par convention 0 et 1. C'est un concept essentiel de l'informatique. En effet, les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors ne gérant chacun que deux états. Un calcul informatique n'est donc qu'une suite d'opérations sur des paquets de 0 et de 1, appelés octets lorsqu'ils sont regroupés par huit.

Dans ce type de codage, chaque nombre est représenté de façon unique par une suite ordonnée de chiffres. Et chaque chiffre représente une puissance de la base. Si on se limite dans un premier temps aux nombres entiers positifs, en base dix ces puissances sont : un (1), dix (représenté par 10), cent (dix fois dix, représenté par 100), mille (dix fois cent, représenté par 1000), dix mille etc.
En base deux, ces puissances sont : un (1), deux (représenté lui aussi par 10), quatre (deux fois deux, représenté par 100), huit (deux fois quatre, représenté par 1000), seize (deux fois huit, représenté par 10000) etc.
Ainsi 11 = 8 + 2 + 1 = **1**$*2^3$ + **0**$*2^2$ + **1**$*2$ + **1**$*2^0$ donc 11 est codé en base 2 par **1011**.
Effectuer la multiplication de 11 par 1 avec la méthode de multiplication « à la russe » et montrer comment cette méthode permet le codage de 11 en binaire.
Coder de la même façon 26 et 78.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne le codage en binaire d'un nombre entier.
Puis donner le codage binaire de105 et 678.

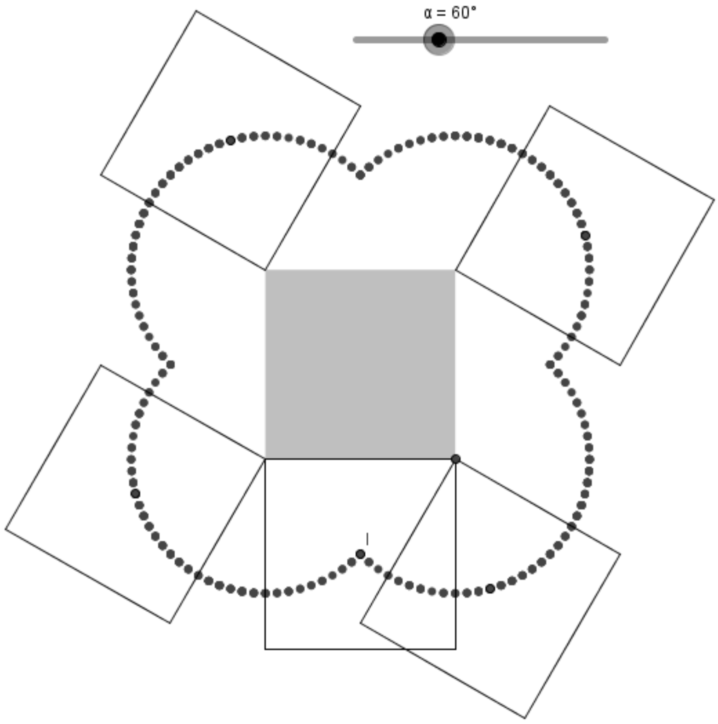
Géométrie, transformations, géogébra…

<u>2007 – Niveau 2 – Des carrés qui tournent</u>

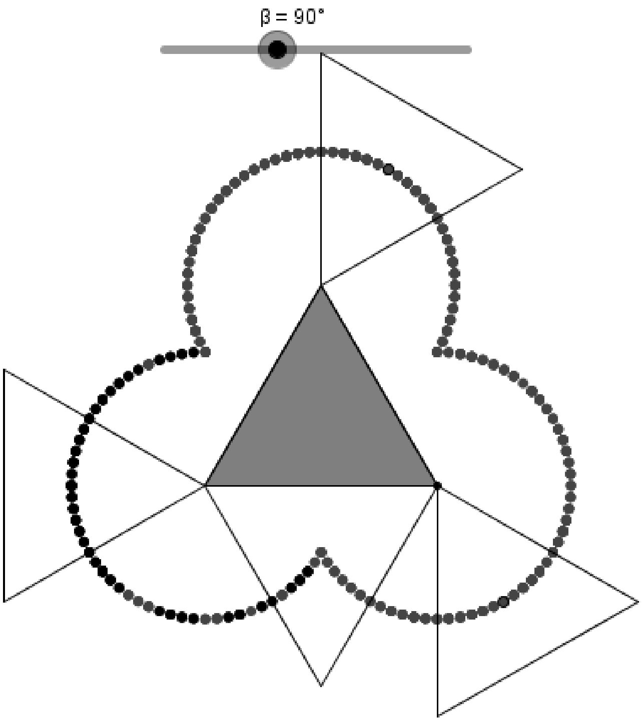


Le carré gris est fixe et mesure 4 cm de côté.
Le carré blanc a les mêmes dimensions et «tourne» autour du carré gris jusqu'à revenir à sa position de départ.
Dessiner la trajectoire du point I centre du carré blanc. Calculer la longueur de cette trajectoire.
Plusieurs prolongements sont envisageables ici.
Tout d'abord pour faire comprendre quelle est la trajectoire du point I, une construction sur géogébra sera utile à de nombreux élèves.
On utilise des rotations successives de 180° et de centres différents : tour à tour les sommets du carré gris sont les centres de ces rotations.
En créant un curseur correspondant à l'angle à faire varier de 0° à 180° et en activant la trace du centre I, on peut faire apparaitre la trajectoire.
Le calcul de la longueur de la trajectoire correspond à la longueur de quatre demi-cercles de rayon R où R est égal à la moitié de la diagonale d'un des carrés.
A l'aide du théorème de Pythagore, on retrouve que R = $2\sqrt{2}$.

Chaque demi-cercle mesure donc $\pi \times 2\sqrt{2}$.
La longueur de la trajectoire est donc égale à $4\pi \times 2\sqrt{2} \approx 35{,}54\ cm$.



On peut prolonger cet énoncé en changeant la figure de base :
Par exemple, on peut étudier la même question avec des triangles équilatéraux de côté 4 cm.



On a cette fois-ci trois demi-cercles de centres respectifs les sommets du triangle équilatéral.
Les rayons de ces demi-cercles est égal au deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral.

A l’aide du théorème de Pythagore, on peut retrouver la hauteur du triangle de côté 4cm : $2\sqrt{3}$ cm.

Le rayon des cercles est donc égal à $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm.

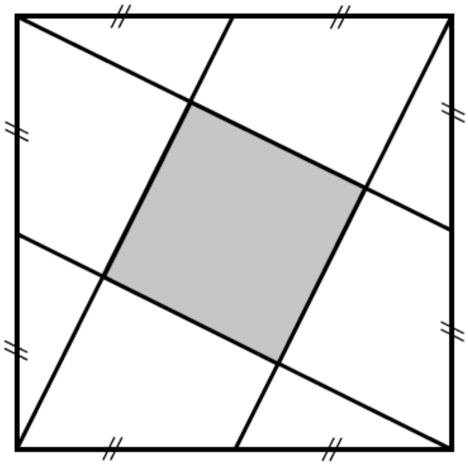
La longueur de la trajectoire est donc égale à $3 \times \pi \times \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 21{,}77$ cm.

Les élèves qui n’auraient pas trouvé la solution du premier énoncé peuvent réinvestir les explications données pour résoudre le 2ème problème.

On peut aussi se servir de construction de ce type pour créer de belles figures à l’aide du logiciel scratch dans lequel on peut faire varier les couleurs au fur et à mesure des constructions des carrés qui tournent. Ceci peut être intéressant à mettre en œuvre dans un **EPI Mathématiques – Arts**.

Géométrie analytique, transformations

2010 – Niveau 1 – Carrés



On peut faire construire la figure sur géogébra pour avoir une réponse.

Pour la démonstration il suffit de regrouper les parties de carrés entourant le carré gris.

En observant la figure, on peut en déduire que dans le grand carré de côté 2 mètres, il y a l’équivalent de 5 carrés gris.

L’aire du grand carré est égale à 4 m²

L’aire du carré gris est donc égale à $\frac{4}{5} = 0{,}8$ m².

Voici un prolongement possible de cet exercice :

On nomme ABCD le grand carré.

On note k un nombre appartenant à [0 ; 2] et on place F,G, H et I tels que DF = CG = BH = AI = k.

On trace les droites (DG), (CH), (BI) et (AF). Les quatre points d’intersection (J, K, L et M) obtenus sont les sommets d’un carré.

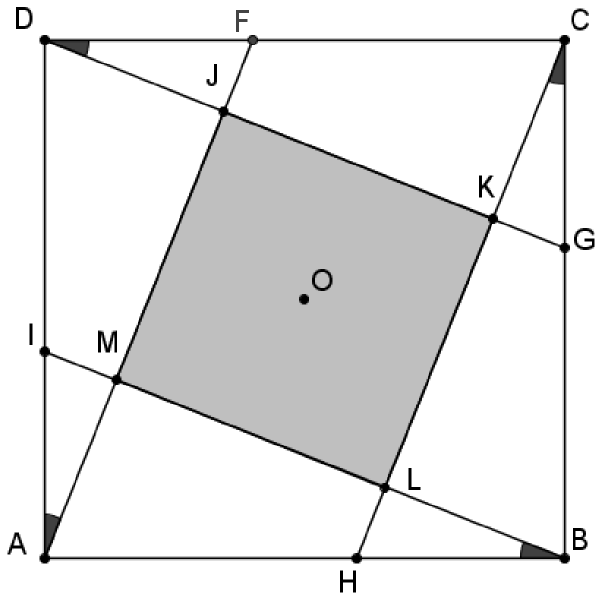
On peut montrer que JKLM est un carré en considérant des triangles isométriques : DGC et ADF sont isométriques puisque ce sont deux triangles rectangles et que DC = DA et CG = DF.

On en déduit les égalités d’angles $\widehat{FAD} = \widehat{GDC}$ et $\widehat{DFA} = \widehat{DGC}$ et ces deux couples d’angles sont complémentaires.

Ainsi, les triangles DKC et DJA sont aussi des triangles rectangles (semblables à ADF et DGC).

On en déduit que (DG) et (CH) sont perpendiculaires, de même (AF) et (DG) sont perpendiculaires.

Par les propriétés de symétrie du carré, on a alors aussi (AF) et (IB) perpendiculaires. Donc JKLM est un quadrilatère possédant trois angles droits, c'est donc un rectangle.
On en déduit aussi que les droites (AF) et (CH) sont parallèles donc les triangles DJF et DKC sont semblables.
C'est aussi le cas des triangles AIM et DAF.
Avec les égalités des longueurs de [DF], [CG] et [AI], on obtient aussi que les couples de triangles AIM et DJF d'une part et de DKC et ADJ d'autre part sont des couples de triangles isométriques.
On en déduit DJ = AM et DK = AJ donc JK = JM donc le rectangle JKLM est bien un carré.

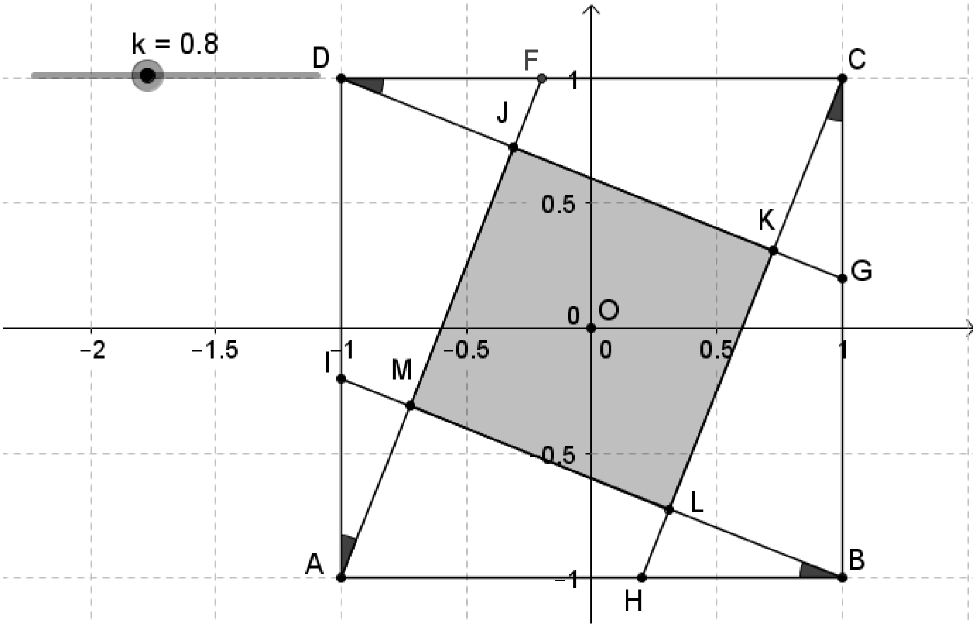


Pour trouver l'aire du carré gris, on cherche tout d'abord l'aire du triangle rectangle DCG.
Cette aire est égale à 2k/2 = k m².
Ce triangle DCG contient les deux triangles semblables DCK et CKG qui sont aussi semblables à DCG.
Le rapport de réduction du triangle DCK au triangle CKG est DF/DC = k/2.
Le rapport d'agrandissement des deux aires est donc égal à k²/4.
Si on note A l'aire du triangle DCK, l'aire du triangle CKG est égale à $\frac{k^2}{4}A$.
L'aire du triangle DGC est égale à la somme des aires des triangles DCK et CKG.
On a donc $A + \frac{k^2}{4}A = k$ donc $A = \frac{4k}{k^2+4}$ et l'aire de CKG est égale à $\frac{k^3}{k^2+4}$ (on multiplie par $\frac{k^2}{4}$)
On en déduit l'aire du quadrilatère JFCK par différence des aires des triangles DKC et DFJ (qui est un triangle isométrique à CKG).
L'aire du quadrilatère est égale à $\frac{4k}{k^2+4} - \frac{k^3}{k^2+4} = \frac{k(4-k^2)}{4+k^2}$ et l'aire du grand carré est égale à 4.

L'aire du carré gris est alors égal à $4-\left(2k+2\frac{k(4-k^2)}{4+k^2}\right)=\frac{4k^2+16-16k}{k^2+4}=\frac{4(2-k)^2}{k^2+4}$

Pour k = 1, on retrouve la valeur $\frac{4}{5}=0{,}8$ pour l'aire du carré gris.

On peut aussi travailler avec des équations de droites. Pour simplifier, on peut prendre pour origine du repère le centre du carré.



Dans ce repère, les points de la figure ont pour coordonnées A(-1 ;-1), B(1 ; -1), C(1 ;1), D(-1 ;1), F(-1+k;1), G(1 ;1-k), H(1-k ;-1) et I(-1 ;-1+k).
On peut à l'aide de ces coordonnées trouver les équations des droites (DG), (IB), (AF) et (CH).
Pour la droite (DG) :
Le coefficient directeur est égal à $\frac{1-k-1)}{1-(-1)}=\frac{-k}{2}$.
Une équation de (DG) est donc de la forme $y=\frac{-k}{2}x+p$.
D appartient à (DG) donc $1=\frac{-k}{2}(-1)+p$ donc $p=1-\frac{k}{2}=\frac{2-k}{2}$.
Une équation de la droite (DG) est donc $y=\frac{-k}{2}x+\frac{2-k}{2}$.
La droite (IB) est parallèle à (DG) donc elles ont le même coefficient directeur et une équation de (IB) est donc de la forme $y=\frac{-k}{2}x+p$.
B appartient à la droite (IB) donc $-1=\frac{-k}{2}+p$ donc $p=-1+\frac{k}{2}=\frac{k-2}{2}$ et l'équation de la droite (IB) est $y=\frac{-k}{2}x+\frac{k-2}{2}$ (On aurait pu aussi trouver cette valeur avec le fait que O est aussi le centre du carré gris.)

De la même façon, la droite (AF) a pour équation : $y=\frac{2}{k}x+\frac{2-k}{k}$ et la droite (CH) a pour équation : $y=\frac{2}{k}x+\frac{k-2}{k}$.

(On peut aussi utiliser que les droites (AF) et (CH) sont perpendiculaires à (DG).)

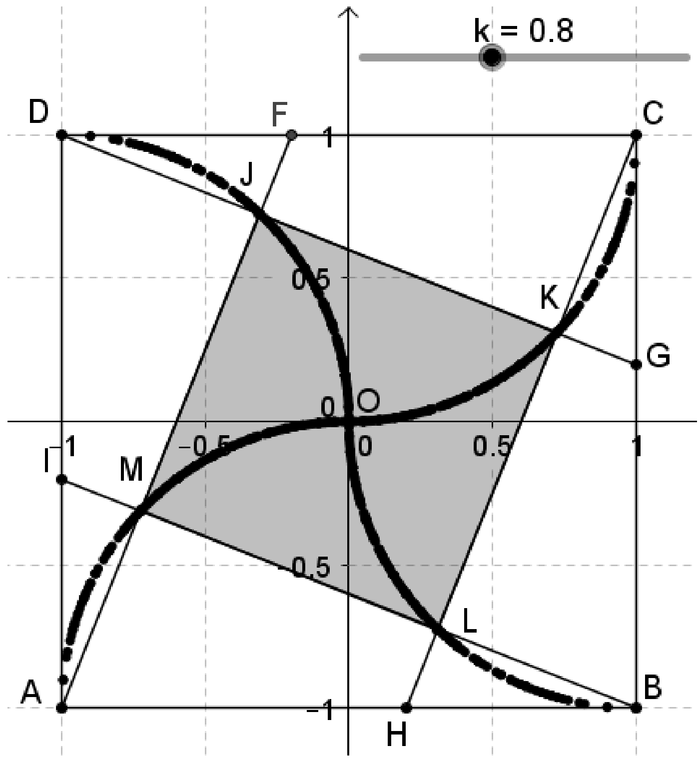
Grâce à ces équations de droites, on peut trouver les coordonnées des sommets du carré.
Pour trouver les coordonnées de J, point d'intersection de (DG) et (AF), on résout
$\begin{cases} y = \frac{-k}{2}x + \frac{2-k}{2} \\ y = \frac{2}{k}x + \frac{2-k}{k} \end{cases}$.
On en déduit que l'abscisse de J vérifie l'équation $\frac{-k}{2}x + \frac{2-k}{2} = \frac{2}{k}x + \frac{2-k}{k} \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{k} + \frac{k}{2}\right) = \frac{2-k}{2} - \frac{2-k}{k} \Leftrightarrow \frac{k^2+4}{2k}x = \frac{2k-k^2-4+2k}{2k}$
On a donc $x = \frac{-(2-k)^2}{k^2+4}$ et l'ordonnée de J est égale à $y = \frac{-k}{2} \times \frac{-(2-k)^2}{k^2+4} + \frac{2-k}{2} = \frac{k(2-k)^2+(2-k)(k^2+4)}{2(k^2+4)} = \frac{-4k^2+k^3+4k+2k^2+8-k^3-4k}{2(k^2+4)} = \frac{8-2k^2}{2(k^2+4)} = \frac{4-k^2}{k^2+4}$.
Les coordonnées de J sont $J\left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4}; \frac{4-k^2}{k^2+4}\right)$.

Par symétrie par rapport à l'origine des sommets du carré gris, on obtient les coordonnées des points K, L et M :
Les coordonnées de K sont $K\left(\frac{4-k^2}{k^2+4}; \frac{(2-k)^2}{k^2+4}\right)$.
Les coordonnées de L sont $L\left(\frac{(2-k)^2}{k^2+4}; \frac{k^2-4}{k^2+4}\right)$.
Les coordonnées de M sont $M\left(\frac{k^2-4}{k^2+4}; \frac{-(2-k)^2}{k^2+4}\right)$.

On peut enfin, calculer la longueur d'un côté du carré gris au carré pour obtenir son aire :

$$\begin{aligned} JK^2 &= \left(\frac{4-k^2}{k^2+4} - \frac{-(2-k)^2}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{(2-k)^2}{k^2+4} - \frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4-k^2+4-4k+k^2}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-4k+k^2-4+k^2}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{8-4k}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{-4k+2k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{4(2-k)}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{2k(-2+k)}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \frac{(16+4k^2)(2-k)^2}{(k^2+4)^2} = \frac{4(2-k)^2}{(k^2+4)} \end{aligned}$$

Ce que l'on avait trouvé précédemment avec les triangles semblables et isométriques.
La plus –value de ce calcul peut-être l'étude des lieux des sommets lorsque k varie.
Le logiciel géogébra permet de visualiser que ces lieux de points sont des quarts de cercle :



Etudions la trajectoire du point J. On conjecture grâce au logiciel que c'est un quart de cercle de centre E le milieu de [AD] qui a pour coordonnées (-1 ; 0)

Les coordonnées du point J sont $\left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4} ; \frac{4-k^2}{k^2+4}\right)$

On calcule EJ² pour toutes les valeurs de k :

$EJ^2 = \left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{-4+4k-k^2+k^2+4}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{4k}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \frac{8k^2+16+k^4}{(k^2+4)^2} = \frac{(k^2+4)^2}{(k^2+4)^2} = 1.$

J est donc bien sur le cercle de centre E et de rayon 1.

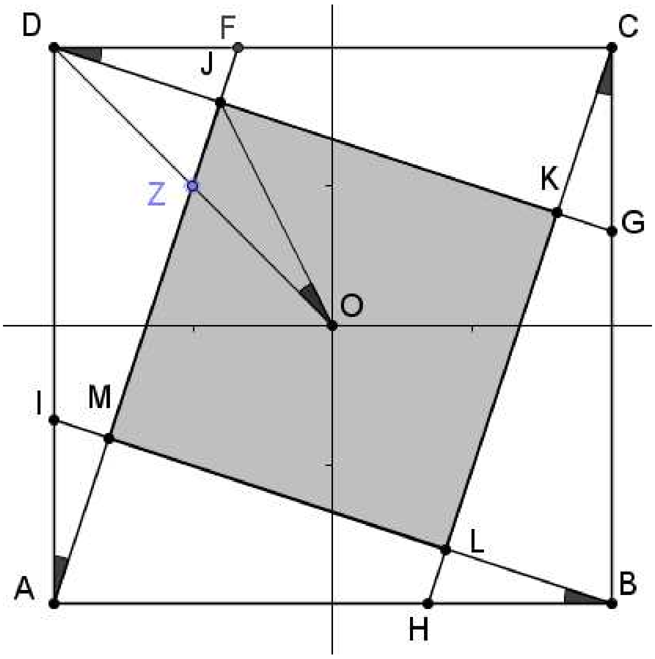
De plus en étudiant le sens de variation de la fonction qui à k associe $\frac{-(2-k)^2}{k^2+4}$ sur [0 ; 2], on peut démontrer que l'abscisse de J est croissante sur [0 ; 2] et prend les valeurs de -1 à 0. Ceci confirme que le lieu de points cherché est un quart de cercle. On a les trois autres quarts de cercles par les propriétés de symétrie des carrés.

Toute cette étude nous amène à chercher la transformation qui change le carré blanc en le carré gris.

Toujours grâce au logiciel, on peut conjecturer qu'il s'agit d'une composée de deux transformations : une homothétie puis une rotation toutes les deux de centre O puisque c'est ce point qui est commun aux deux carrés donc invariant.

On retrouve le rapport de l'homothétie par les raisonnements précédents. (Il s'agit de la racine du rapport des aires des carrés) : l'homothétie est donc de rapport $\frac{2-k}{\sqrt{k^2+4}}$ et de centre 0.

Pour la rotation il faut trouver l'angle, il faut donc trouver l'angle $\widehat{D0J}$que l'on notera α.



On considère les triangles DZA et JZO avec Z point d'intersection de (AF) et (DO).
Les angles $\widehat{ADZ}$ et $\widehat{ZJO}$ sont égaux à 45° puisque [JO] est une partie d'une diagonale du carré gris et [DZ] une partie d'une diagonale du carré blanc.
De plus les angles $\widehat{DZA}$ et $\widehat{JZO}$ sont opposés par le sommet donc sont aussi égaux.
Les triangles DZA et JZO sont donc semblables et $\widehat{DAZ} = \widehat{ZOJ} = \widehat{DOJ} = \alpha$.
Dans le triangle rectangle DAF,
tan(α) = DF/DA = k/2 donc α = Arctan(k/2) : c'est l'angle de la rotation.

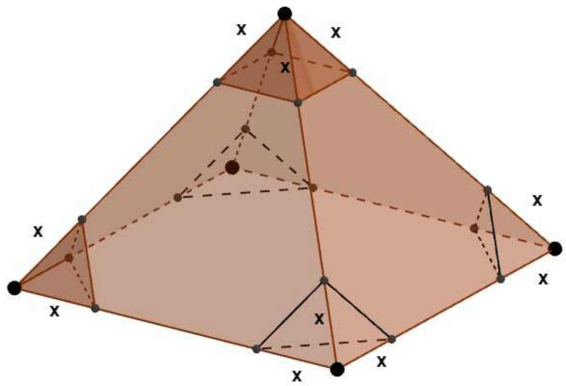
Comme on vient de le voir, cette situation géométrique peut être travaillée avec plusieurs points de vue (triangles semblables, géométrie analytique et équation de droite, transformations planes). Nous ne proposons pas ici de scénarios tous prêts pour les élèves car le problème peut être pris de plusieurs façons différentes.

Géométrie dans l'espace, fonctions

2011 – Niveau 1 – La pyramide tronquée

Et sa solution :
La pyramide avant découpage compte 5 faces, 8 arêtes et 5 sommets.
Chaque découpe au niveau d'un sommet crée une face supplémentaire. Il y a donc 5+5=10 faces.
La découpe aux quatre coins de la base crée à chaque fois trois arêtes supplémentaires. La découpe au niveau du sommet principal crée quatre arêtes de plus. Il y a donc 8+3×4+4=24 arêtes.
Chaque coin de la base découpé remplace un sommet par 3 sommets. Le sommet principal découpé est remplacé par quatre sommets. Il ne reste aucun des sommets initiaux. Il y a donc 3×4+4=16 sommets.

On peut définir une fonction qui calcule le volume du solide après découpage des sommets, en notant x la distance entre le sommet et la trace de la découpe sur les arêtes qui partent du sommet en question. On va définir une pyramide à base carré particulière, c'est-à-dire une où toutes les arêtes mesurent la même longueur. Voici un exemple d'énoncé dans ce sens :



Soit une pyramide à base carré, avec des triangles équilatéraux comme faces triangulaires. Toutes les arêtes mesurent 8 cm. On découpe la pyramide au niveau de tous ses sommets, de façon que la distance entre chaque sommet initial et l'endroit de la découpe sur les arêtes qui en partent soit un nombre identique pour tous les sommets, noté x.

On veut étudier l'évolution du volume de la pyramide tronquée selon les valeurs de x.

1) Quelles sont les valeurs prises par x ?

2) Tracer un patron de la pyramide tronquée en vraie grandeur, avec $x = 2$.

3) Déterminer le volume de la pyramide avant découpage.

4) Calculer, en fonction de x la valeur :

a) du volume de la pyramide enlevée au niveau de sommet principal.

b) du volume d'une pyramide enlevée au niveau d'un des quatre coins de la base.

c) du volume restant après découpage.

5) On note $V(x)$ le volume restant après découpage en fonction de x.

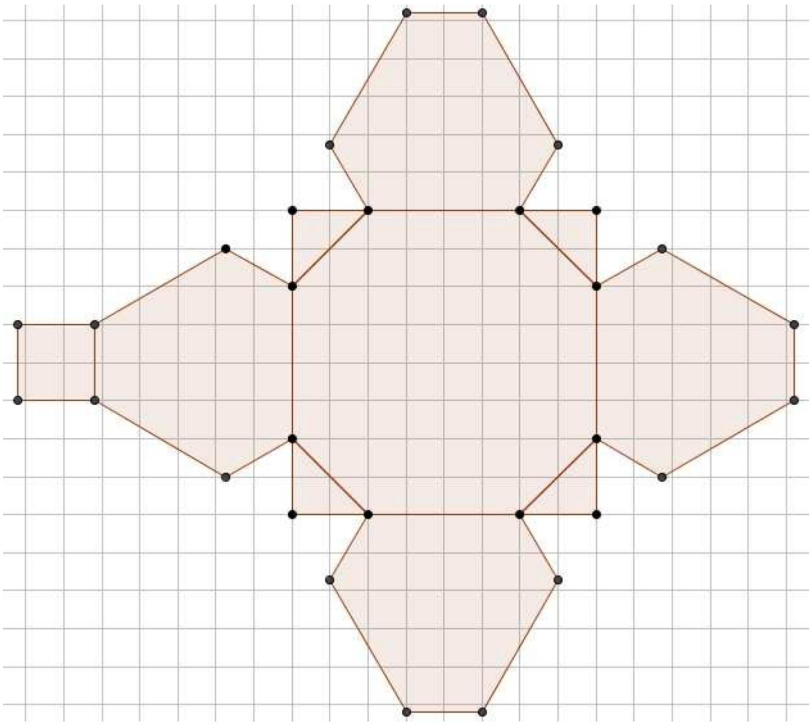
a) Tracer la courbe représentative de V dans un repère orthogonal. (Unités : 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée)

b) Déterminer le pourcentage minimum du volume initial conservé dans le solide final. (Arrondir à 1% près)

Voici une correction :

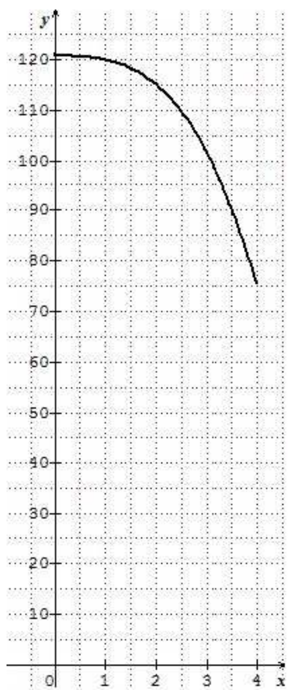
1) x peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 4 cm.

2) Le patron pour $x = 2$ est dessiné ci-dessous (les petits carreaux font 1 cm de côté) :



3) La formule du volume d'une pyramide : V = (Aire de la Base × Hauteur) / 3
La base est un carré de 8 cm de côté donc Aire de la Base = 64 cm²
La hauteur est la distance entre le centre de la base (H) et le sommet principal (S).
Le centre de la base est au milieu des diagonales de la base.
Les diagonales des carrés mesurent $8\sqrt{2}$ cm (utilisation du théorème de Pythagore).
La distance entre un sommet de la base (A) et le centre est donc de $4\sqrt{2}$ cm.
La distance AS mesure 8 cm puisque les faces triangulaires de la pyramide sont équilatérales.
Comme le triangle AHS est rectangle en H, on en déduit la relation suivante à l'aide du théorème de Pythagore :
HS² = AS² – AH² = 8² – $\left(4\sqrt{2}\right)^2$ = 64 – 32 = 32 donc la hauteur mesure $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm
Donc le volume de la pyramide initiale est : V = $\frac{64\times 4\sqrt{2}}{3} = \frac{256\sqrt{2}}{3}$ cm^3

4) a) La pyramide enlevée au sommet est une réduction de la pyramide de départ, mais de côté x plutôt que de côté 8. L'aire de la base est donc x² cm², la hauteur mesure x$\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm et le volume est donc : V_1 = $x^2 \times x\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{x^3\sqrt{2}}{6}$ cm^3
b) En regroupant deux pyramides enlevées dans deux coins opposés de la base, on reforme la pyramide enlevée au sommet. Le volume de chacune de ses pyramides est donc la moitié de V_1, c'est-à-dire $V_2 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ cm^3
c) Le volume restant s'obtient avec le calcul suivant :
$V - V_1 - 4\,V_2 = \frac{256\sqrt{2}}{3} - \frac{x^3\sqrt{2}}{6} - 4 \times \frac{x^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(512 - x^3 - 2x^3)\sqrt{2}}{6}$ cm^3
Et en simplifiant on obtient $\frac{(512-3x^3)\sqrt{2}}{6}$ cm^3



5) a) La courbe représentative de la fonction V définie sur [0 ; 4] par $V(x) = \frac{(512-3x^3)\sqrt{2}}{6}$ ci-contre :

b) La fonction V est décroissante sur [0 ; 4] (logique puisque lorsque x augmente, on enlève de plus en plus de matière)
Donc la valeur minimale est obtenue pour x=4.
Pour déterminer le pourcentage du volume conservé,
il faut faire le rapport entre les valeurs $v(4)$ et $v(0)$.

$$\frac{v(4)}{v(0)} = \frac{\frac{(512-3\times4^3)\sqrt{2}}{6}}{\frac{(512-3\times0^3)\sqrt{2}}{6}} = \frac{(512-3\times64)}{(512-3\times0)} = \frac{320}{512} = 0{,}625$$

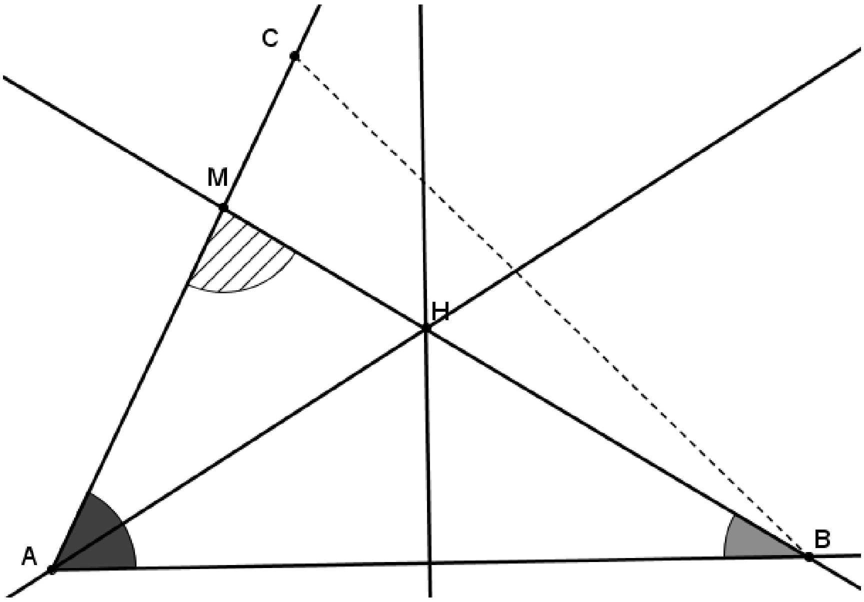
Le pourcentage du volume conservé est, au minimum, de 62,5%

Géométrie plane, fonctions

2009 – Niveau 3 - Triangle original :

Voici une première solution très élégante qui n'utilise que les propriétés du triangle et de ses droites remarquables.
On considère un triangle ABC quelconque.
On trace la bissectrice de l'angle BAC.
On trace ensuite la médiatrice de [AB] qui coupe la bissectrice de BAC en H. On trace alors la droite (BH).
Par propriété de la médiatrice, le triangle ABH ets isocèle et l'angle ABH est donc égal à la moitié de l'angle BAC.
Notons a = ABH (on a alors BAC = 2a et BAH = a)
Notons M le point d'intersection de (BH) et (AC).
La somme des angles du triangle AMB est égale à 180°.
On a donc AMB = 180 – 3a.
Si on veut que la médiatrice de [AB], la bissectrice de BAC et la hauteur issue de B soinet concourantes, il faut que AMB soit un angle droit.
C'est à dire que 180 – 3a = 90.
Cela donne 3a = 90 donc a = 30 donc BAC = 60°.
Il suffit donc d'avoir un angle de 60° pour avoir l a concourance d'une bissectrice, d'une médiatrice et d'une hauteur dans un triangle. A part pour nommer les angles, le point C n'a joué aucun rôle dans la démonstration.
Cette preuve est simple pour les arguments utilisés mais elle n'est pas si simple à trouver. Il faut partir du point de vue, en construisant d'abord la bissectrice et la médiatrice et voir alors quelle contrainte cela donne si on veut que la hauteur

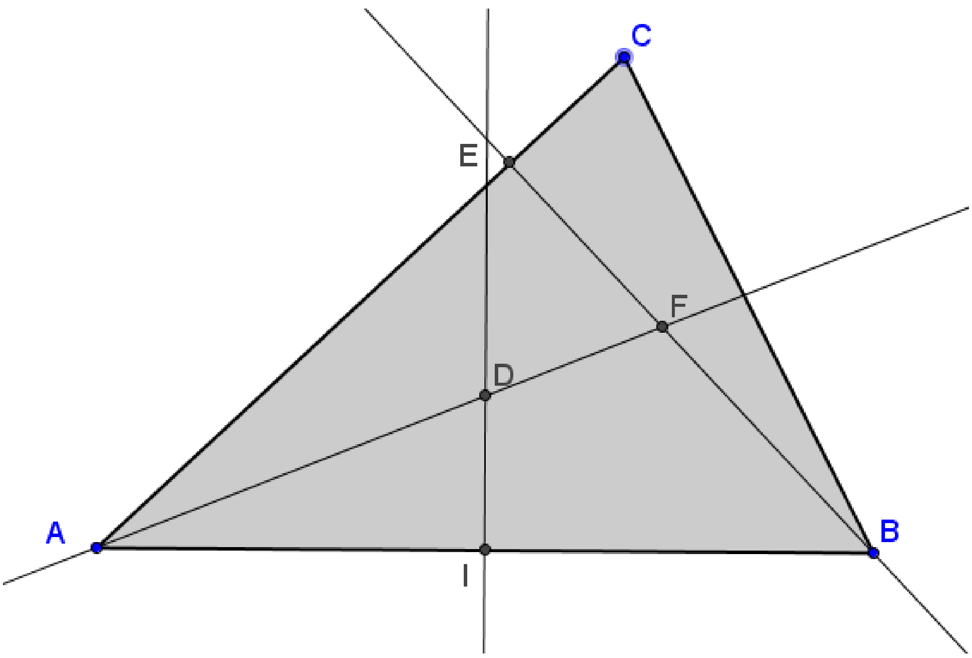
concoure au même point que les deux autres droites.



Cet énoncé tel quel peut faire l’objet d’un travail de recherche avec les élèves. Il est intéressant pour cette recherche de permettre de trouver une conjecture de la solution à l’aide du logiciel géogébra car la démonstration elle-même n’est pas simple à trouver.

Voici une deuxième preuve qui utilise les fonctions trigonométriques. La preuve est moins élégante que la première mais fait travailler les fonctions et a l’avantage de pouvoir faire l’objet d’un exercice guidé. On pourra après l’exercice montrer aux élèves la première preuve.
Voici un énoncé possible (qui intégre la phase de conjecture sur géogébra).
On prendra pour la recherche AB = 10 cm.

1. Construire un triangle ABC sur Géogébra.
2. Construire la bissectrice de l’angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B.



3. Bouger les sommets de façon à ce que ces trois droites soient concourantes. Conjecturer une réponse à l'exercice.
4. Retransformer le triangle de façon à ce que les droites ne soinet pas concourantes. Nommer I le milieu de [AB], E le pied de la hauteur issue de B, D le point d'intersection de la bissectrice de la médiatrice tracées, F le point d'intersection de la bissectrice et de la hauteur tracée.
5. On pose α la mesure en degré de l'angle Â. Exprimer AD, AE puis AF en fonction de l'angle α. (On pourra considérer les triangles ADI, AEB et AEF).
   On appelle f la fonction définie sur [0 ; 90] par $f(\alpha) = AD$
   On appelle g la fonction définie sur [0 ; 90] par $g(\alpha) = AF$
6. Expliquer pourquoi on répond à l'exercice lorsque AD = AF.
7. Représenter à l'aide d'un tableur / de géogébra / d'une calculatrice (attention les logiciels travaillent avec des radians !) les fonctions f et g.
8. Donner par lecture graphique la valeur de α pour laquelle la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B sont concourantes.
9. Retrouver la réponse par un calcul.

Voici les éléments de réponses à partir de la question 5

Dans le triangle rectangle ADI, on a $AI = \frac{AB}{2}$; $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{AI}{AD}$ donc $AD = \frac{5}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

Dans le triangle rectangle AEB, on a $\cos(x) = \frac{AE}{AB}$ donc $AE = 10\cos(x)$

Dans le triangle rectangle AEF, on a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{AE}{AF}$ donc $AF = \frac{AE}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{10\cos(x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

Ainsi, $f(x) = \frac{5}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $g(x) = \frac{10\cos(x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Les droites sont concourantes si et seulement si AD = AF

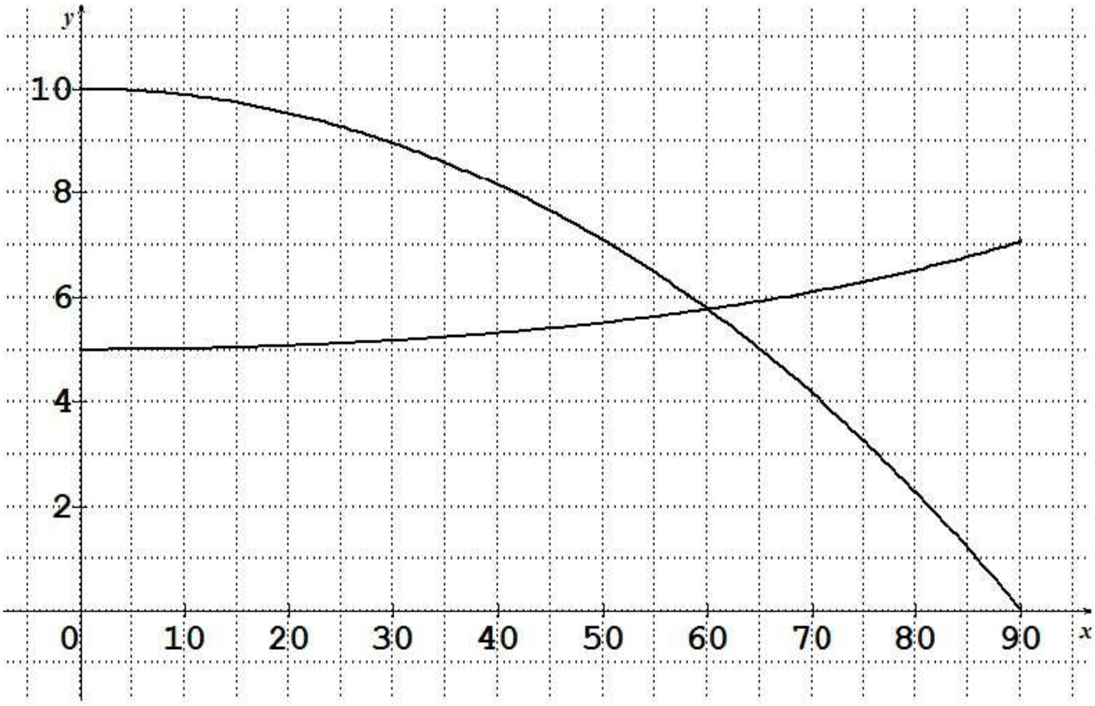
Si on pose l'équation avec $x \in [0; 90]$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{10\cos(x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow \cos(x) = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 60$

Pour la représentation graphique :

Attention : pour les logiciels qui travaillent en radians écrire : $f(x) = \frac{5}{\cos\left(\frac{\pi x}{360}\right)}$ et

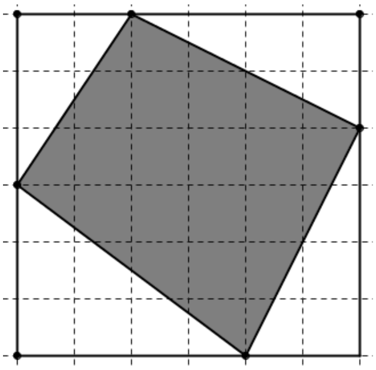
$g(x) = \frac{10\cos(\pi x/180)}{\cos\left(\frac{\pi x}{360}\right)}$



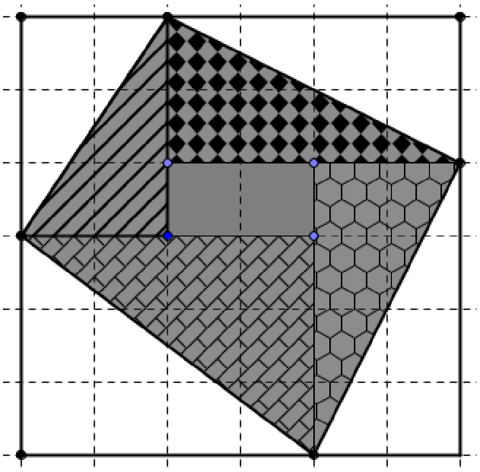
Aires, fonctions

2006 – Niveau 1 – Morceaux de carrés

Quelle est la fraction du carré représentée par la partie foncée ?



Des découpages permettent de répondre à la question posée sans grande difficulté. En voici un ci-dessous. On peut aussi rassembler les carreaux de la partie non colorée qui ne sont pas entiers de façon à reconstituer des carreaux entiers.

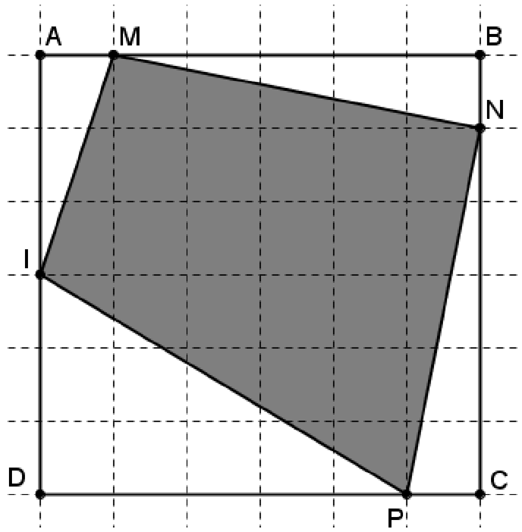


L’aire totale est de 36 carreaux.

La différence des aires entre la partie colorée et la partie non colorée est de 2/36.

La fraction du carré représentée par la partie foncée est donc de 19/36.

A partir de cet énoncé, en voici un autre qui donne une situation classique d'étude de fonction polynôme du second degré.
Soit ABCD un carré de côté 6 cm.
Soit I le milieu de [AD].
M est un point du segment [AB].
On construit sur [BC] le point N tel que BN = AM puis sur [CD] le point P tel que CP = AM.
Voici une figure avec AM = 1. (dans la situation initiale, AM = 2)



1.Lorsque AM = 1, calculer l'aire du quadrilatère MNPI.
On pose AM = x.
2. a) Quelles valeurs peut prendre x ? On notera I cet ensemble de valeurs.
b) Calculer l'aire du triangle AMI en fonction de x
c) Calculer l'aire du triangle MBN en fonction de x
d) Calculer l'aire $A(x)$ du quadrilatère IMNP en fonction de x
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de IMNP est minimale.

Voici des éléments de réponse :
La première question permet de réfléchir à la façon de calculer l'aire en effectuant la différence entre l'aire du carré ABCD et la somme des aires des triangles rectangles : AMI, BMN, NCP et DPI.
On trouve pour AM = 1 : A(1) = 36 – (1*3/2 + 5*1/2 + 5*1/2 + 5*3/2) = 36 – 14 = 22.
Une stratégie possible est encore de reconstituer des carreaux mais c'est déjà un peu moins simple qu'avec la situation initiale.
x prend les valeurs de l'intervalle [0 ; 6].
L'aire du triangle AMI est égale à $\frac{3x}{2}$
L'aire du triangle MBN ets égale à $\frac{x(6-x)}{2}$
L'aire du triangle CPN est égale à celle du triangle MBN et celle du triangle DPI est égale à $\frac{3(6-x)}{2}$

On a donc $A(x) = 36 - \left(1{,}5x + \frac{x(6-x)}{2} + \frac{x(6-x)}{2} + 1{,}5(6-x)\right)$

$$= 36 - (1{,}5x + x(6-x) + 9 - 1{,}5x)$$

$$= 36 - (6x - x^2 + 9)$$

Ainsi $A(x) = x^2 - 6x + 27$.

Pour déterminer la valeur de x pour laquelle on obtient le minimum de cette fonction, on utilise la méthode adaptée au niveau des élèves (étude graphique, étude du sens de variation de la fonction, utilisation des propriétés des fonctions polynômes du second degré ; la forme canonique de $A(x)$ est $A(x) = (x-3)^2 + 18$). La réponse est $x = 3$ que l'on pouvait deviner en considérant les propriétés de symétrie du carré.

Cette situation peut aussi être travaillée avec Géogébra et un curseur qui représente x.

Arithmétique, Algorithmique, Fonctions

2013 – Niveau 1 – Drôle de familles :

La famille Rectangle est composée de tous les rectangles qui ont pour aire 105 m² et dont les mesures des côtés sont des nombres entiers de mètres.

Donner, en ordre croissant et en mètres, les différents périmètres des membres de la famille Rectangle.

Une fois que l'on a trouvé les dimensions des rectangles (1x105, 3x35, 5x21, 7x15) on peut donner leurs périmètres : 44, 52, 76, 212 dans l'ordre croissant.

Cette première recherche permet de travailler l'arithmétique avec les critères de divisibilité par 3 et 5 et les méthodes de recherche de diviseurs..

On peut alors amener la classe à travailler sur un algorithme qui permettrait de répondre à la question posée quelque soit l'aire donnée.

Voici un exemple d'exercice avec ce point de vue :

1. Compléter l'algorithme qui donne les dimensions de la famille de rectangles d'aire A donnée par l'utilisateur.

Variables	A, L, k sont des nombres entiers
Entrée	Donner A
traitement	Pour k allant de 1 à A faire Si k divise A alors L prend la valeur … Afficher « le rectangle de dimensions … et … fait partie de la famille de rectangle d'aire ″A″ ». FinSi

(Réponse : L prend la valeur A/k / le rectangle de dimensions ″L″ et ″k″ fait partie de la famille de rectangle d'aire ″A″)

2. Voici une autre proposition d'algorithme à compléter :

Variables	A, L, c, k, m sont des nombres entiers	
Entrée	Donner A m prend la valeur ENT($\sqrt{A}$)* c prend la valeur 0	* ENT($\sqrt{A}$) : partie entière de $\sqrt{A}$
traitement	Pour k allant de 1 à m faire Si k divise A alors c prend la valeur c + 1 L prend la valeur … Afficher «le rectangle n°″ ″ de dimensions … et … fait partie de la famille de rectangle d'aire ″A″ ». FinSi	

Quels intérêts présentent cet algorithme par rapport au précédent ?
(L'algorithme précédent donnait deux fois les rectangles de la famille. Pour A = 105, il donnait le rectangle de dimension 1 et 105 en premier et celui de dimensions 105 et 1 en dernier. On a de plus rajouté un compteur « c » des rectangles. A la fin de l'algorithme c donne le nombre de rectangles de la famille).

3. Faire fonctionner l'algorithme en complétant le tableau donné ci-dessous et en prenant A = 156.

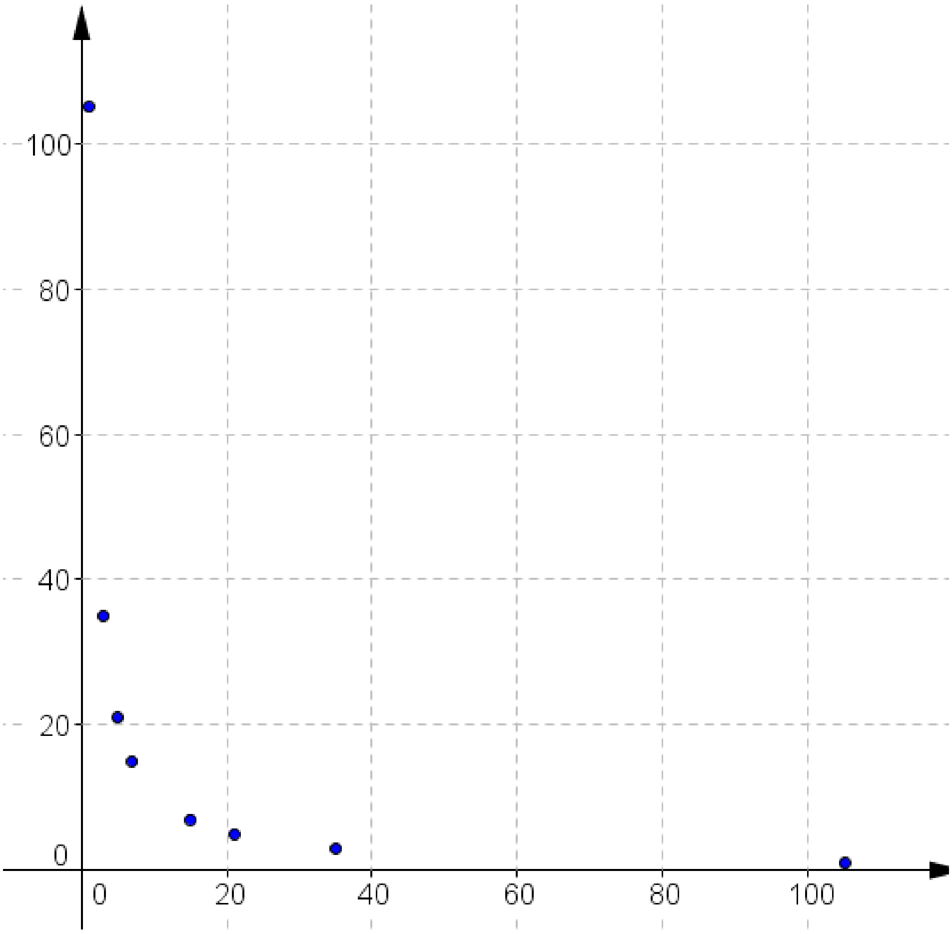
	A	m	k	L	c	Affichage
Entrée	156		0		0	
Itération 1	156		1			
Itération 2	156		2			
Itération 3	156					
Itération 4	156					
Itération 5	156					
Itération 6	156					
Itération 7	156					
Itération 8	156					
Itération 9	156					
Itération 10	156					
Itération 11	156					
Itération 12	156					

4. Quelles instructions peut-on rajouter pour que l'algorithme donne en plus le périmètre de chacun des rectangles ?
(Il faut ajouter la variable P initialisée à 0, puis dans la boucle ajouter les lignes P prend la valeur 2(k + L) et afficher «le périmètre du rectangle n°″c″ est ″P″).

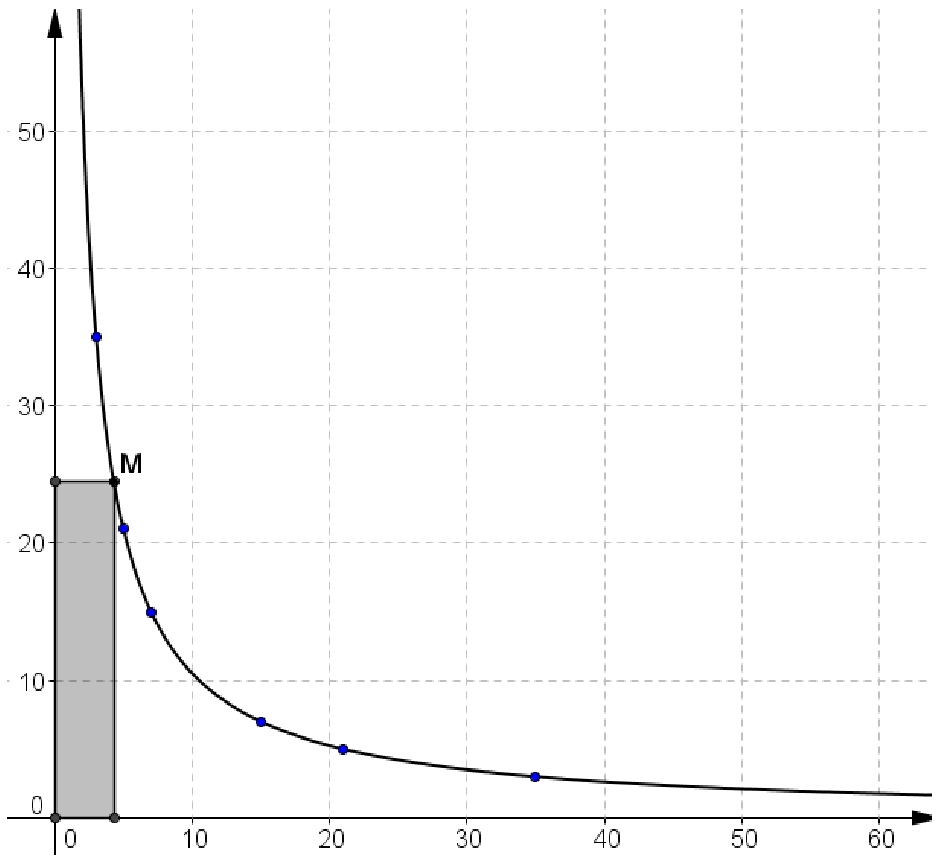
Ces algorithmes peuvent être programmés sur Algobox par exemple.

On peut imaginer aussi une suite à l'algorithme pour que les périmètres soient donnés en ordre croissant.

Pour travailler avec cette situation les fonctions, on peut se demander (avec les élèves) tout d'abord s'il y a une relation affine entre les dimensions. Autrement dit si les points qui ont pour coordonnées les dimensions x et y des rectangles de la famille d'aire 105 sont alignés.
Ce n'est pas le cas bien sûr car on a $y = \frac{105}{x}$ mais cela peut nous permettre de placer les points en question dans un repère et voir que ces points ne sont pas alignés.



Il est alors naturel de vouloir relier les points.
Cela peut être l'introduction de la fonction inverse. On étudie ici sur]0 ; +∞[la fonction qui à x associe $\frac{105}{x}$.
On peut pour bien faire comprendre le nouveau type de fonction faire apparaitre le rectangle d'aire 105 associé aux points de la courbe :



0 est une valeur interdite et impossible à obtenir car il est n'est pas possible d'avoir un rectangle d'aire 105 si une des dimensions vaut 0. La décroissante se comprend aussi aisément avec cette situation.
La symétrie de cette courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$ vient du fait que si $(x\ ;\ y)$ sont les dimensions d'un rectangle de la famille alors (y, x) aussi, et il s'agit du même rectangle.

A la fin du chapitre sur les fonctions homographiques, on peut proposer l'étude d'une fonction qui n'est pas homographique mais qui est lié à ce problème : la fonction périmètre des rectangles.
Voici une proposition d'exercice :
La famille Rectangle est composée de tous les rectangles qui ont pour aire 105 m² et dont les mesures des côtés sont des nombres réels strictement positifs.
1. On note x et y les deux côtés des rectangles de cette famille et on note $f(x) = y$ la fonction qui donne la valeur de y en fonction de x. Donner la formule définissant $f(x)$.
2. Tracer C_f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On pourra choisir pour unités 0,2 cm. Que peut-on dire des variations de f ?
3. On note p la fonction qui donne la valeur du périmètre d'un rectangle de cette famille en fonction de x.
Donner la formule définissant $p(x)$.
4. Tracer C_p, la courbe représentative de p dans un repère où 1 cm correspondra à 5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm correspondra à 10 unités sur l'axe des ordonnées.

5. Montrer que p n'est pas une fonction homographique et étudier le sens de variation de p sur]0 ; +∞[.

Voici les élements de réponse : $f(x) = \frac{105}{x}$ et $p(x) = 2(x + \frac{105}{x})$.
Comme on a $p(x) = 2\left(x + \frac{105}{x}\right) = \frac{2x^2 + 210}{x}$, p n'est pas une fonction homographique.
Pour étudier le sens de variation de p, on peut s'adapter au niveau des élèves : étude graphique ou avec un calcul de dérivée : $p'(x) = \frac{2x^2 - 210}{x^2}$.
On peut aussi chercher pour quelle valeur le périmètre est minimal. C'est le rectangle qui est un carré qui donne un périmètre minimum

$$p\left(\sqrt{105}\right) = \frac{420}{\sqrt{105}} = 4\sqrt{105}$$