IREM 2012-2013
Résolution de problèmes
Etienne Mann
etienne.mann@univ-montp2.fr

La Dalle d'Anubis

Je tiens tout d'abord à vous remercier d'avoir posé ce problème à vos classes. Félicitez vos élèves pour leur recherche et donnez leur rendez-vous l'année prochaine ! J'étais très content d'entendre que certains élèves ont très bien accroché au problème et qu'ils se sont passionnés pour Anubis. Certains ont écrit des programmes informatiques pour faire jouer l'ordinateur.

1. Réponse théorique

Définition 1.1. Nous appelons *stratégie gagnante* une suite de déplacement qui permettra au premier joueur de gagner quelque soit les déplacements de l'adversaire.

Nous avons un théorème de la théorie de jeu qui est le suivant.

Théorème 1.2 (Théorème de Zermelo)**.** *Soit un jeu à deux joueurs qui n'a pas de partie nulle. Alors il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.*

A l'aide ce théorème nous pouvons démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 1.3 (Corollaire du vol de stratégie)**.** *Pour la dalle d'Anubis, le premier joueur a une stratégie gagnante. Sauf dans le cas d'une ligne ou colonne avec trois dalles.*

Démonstration. Par le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Supposons que c'est le second joueur. Ainsi, si le premier joueur se place sur la première dalle en bas à gauche, le second joueur a une stratégie gagnante c'est-à-dire qu'il se place sur une dalle, notée G, qui le fera gagner quelque soit les coups de l'adversaire.
Du coup, nous en déduisons une stratégie gagnante pour le premier joueur en jouant sur cette fameuse dalle G et il va gagner sauf si nous avons une ligne ou colonne avec 3 dalles (cf plus bas). Nous disons qu'il a volé la stratégie gagnante. □

2. Trois résultats partiels

Dans un premier temps, nous allons expliquer trois cas particuliers : le cas d'une ligne (ou une colonne), de 3 lignes (ou 3 colonnes) et celui d'un carré de taille arbitraire. Dans ces trois cas, nous pouvons décrire assez facilement une stratégie gagnante.

2.1. Cas d'une ligne (ou d'une colonne). Le cas de la ligne est clairement équivalent par symétrie au cas d'une colonne. Nous nous plaçons dans le cas d'une ligne à n dalles. Nous numérotons les cases à partir de la case d'Anubis de la droite vers la gauche.
Voici les stratégies gagnantes qui dépendent du nombre de dalles.

(1) **Si nous avons plus de** 4 **dalles.** Le premier joueur se place sur la 4-ième dalle et il gagne.
(2) **Si nous avons** 3 **dalles.** Le second joueur gagne toujours. Ceci est une exception.
(3) **Si nous avons** 2 **dalles.** Le premier gagne toujours.

2.2. Cas avec 3 **lignes (resp. colonnes) et nombre arbitraire de colonnes (resp. lignes).** Nous pouvons supposer que la salle n'ait que 3 lignes mais avec un nombre arbitraire de colonnes. Nous nous plaçons à la gauche de la dalle d'Anubis et le premier joueur gagne.

2.3. Cas d'un carré. Supposons que le carré ait n dalles de coté. Comme le cas du carré 3×3 est traité dans le cas précédent, nous supposons $n \neq 3$.
Nous numérotons les dalles par des couples (a, b) où $1 \leq a, b \leq n$ où a est la a-ième colonne en partant de la droite et b est la b-ième ligne en partant du haut.
Premier coup dans tous les cas : Dans tous les cas le premier joueur va en position $(2,2)$ (en diagonale de la dalle d'Anubis). Il reste donc au second joueur, la première ligne ou la première colonne. Comme les situations sont symétriques, nous supposons que le second joueur jouera toujours sur la première ligne.
Suivant la taille de la pièce, il faut ajuster sa stratégie.
Cas $n \geq 4$. Si le second joueur joue en position $(a, 1)$, nous répondons de la façon suivante

(1) Si $a = 2$, nous jouons en $(1,4)$.
(2) Si $a = 4$, nous jouons en $(1,2)$
(3) Dans tous les autres cas, nous jouons symétrique c'est-à-dire en $(1, a)$.

Cas $n = 2$. Si le second joueur joue en position $(a, 1)$, on joue toujours symétrique c'est-à-dire $(1, a)$.
Cas $n = 3$. cf §. 2.2.

3. Comment aborder le cas général avec des graphes

De manière générale, les jeux se résolvent avec des graphes. D'ailleurs, une petite recherche du théorème de Zermelo sur google vous conduira peut-être à un énoncé sur les graphes.
Nous allons commencer par le graphe du jeu du carré 2×2 puis pour le rectangle 2×3. Dans le cas général, nous pouvons toujours faire le graphe qui peut être extrêmement compliqué... Dans le cas général, le Corollaire 1 nous dit que le premier joueur a une stratégie gagnante mais nous ne savons pas la décrire explicitement.

3.1. **Cas du** 2×2**.**

Pour bien comprendre les dessins ci-dessous :
Notons ◯, le premier joueur et □ le second joueur.
⚠Bien lire pour comprendre les graphiques ci-dessous.

(a) Dans chaque dessin, 1 **ne désigne pas le premier joueur mais le joueur qui doit jouer.** Ainsi, dans une configuration nous pouvons avoir ① ou ② ou $\boxed{1}$ ou $\boxed{2}$ suivant si le joueur ◯ doit jouer ou pas.

(b) Quand le joueur 1 a joué, nous arrivons dans une nouvelle configuration où l'ancien joueur 2 devient le nouveau 1 et vice-versa.

(c) **Notre but est de déterminer dans chaque dessin, si c'est la configuration gagnante pour le joueur** 1 **càd celui qui va jouer.**

Pour faire le graphe du jeu, on procède comme suit.

(1) Nous dessinons toutes les configurations possibles : nous plaçons 1 (resp. 2) pour la position du premier (resp. second) joueur. Ici nous avons 12 cas possibles.

(2) Nous mettons une flèche orientée entre le cas A et le cas B si après le déplacement du joueur 1, la configuration A devient B. Illustrons ça sur deux exemples ci-dessous. Dans l'exemple de gauche, le premier joueur se déplace, la position de gauche devient celle de droite et cette configuration (celle du milieu) est gagnante pour ② mais perdante pour $\boxed{1}$. D'après le (c) ci-dessus, nous devons regarder la position par rapport à au joueur 1 (ici $\boxed{1}$) donc cette position est perdante. **Remarquez aussi l'inversion de l'ordre des joueurs.** Dans l'exemple de droite, la position est gagnante pour ① qui gagne par effondrement. **Les cases grisées sont celles qui sont effondrées.**

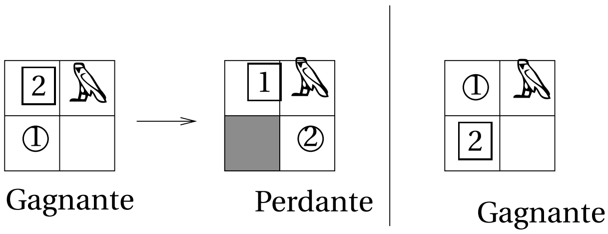


FIGURE 1. Deux cas

(3) Une fois que nous avons fait tous les dessins, nous regardons les configurations finales c'est-à-dire celles où nous pouvons dire de façon évidente si le joueur noté 1 gagne ou perd. Après nous voulons savoir si une configuration donnée (pas forcément une configuration finale) dans le graphe est gagnante

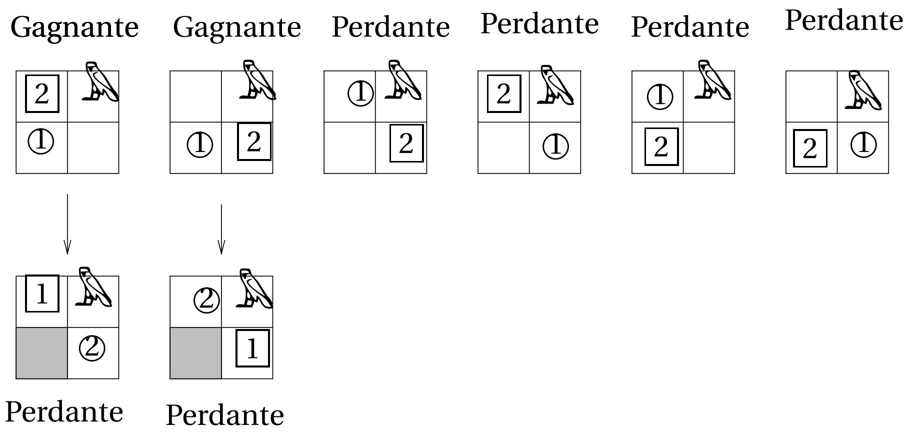
ou perdante (toujours pour le joueur 1 !). En partant d'une configuration finale, nous appliquons la règle suivante :

Règle 3.1. (a) Si d'une configuration, il existe une flèche vers une configuration perdante, alors la configuration est gagnante.

(b) Si d'une configuration, toutes les flèches vont vers des configurations gagnantes, alors la configuration est perdante.

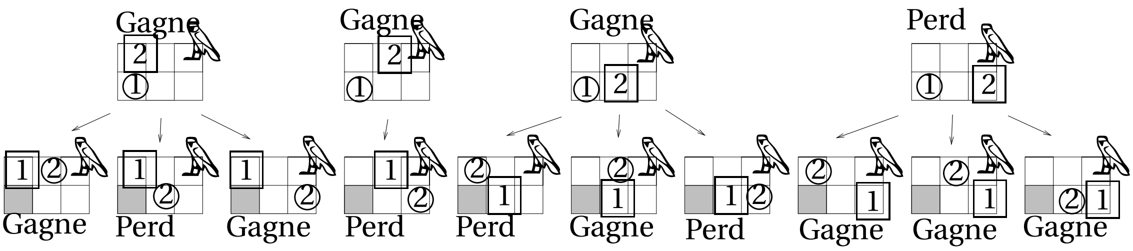
Ainsi, dans notre figure précédente, nous en déduisons que la configuration de gauche est gagnante car celle à sa droite est perdante.

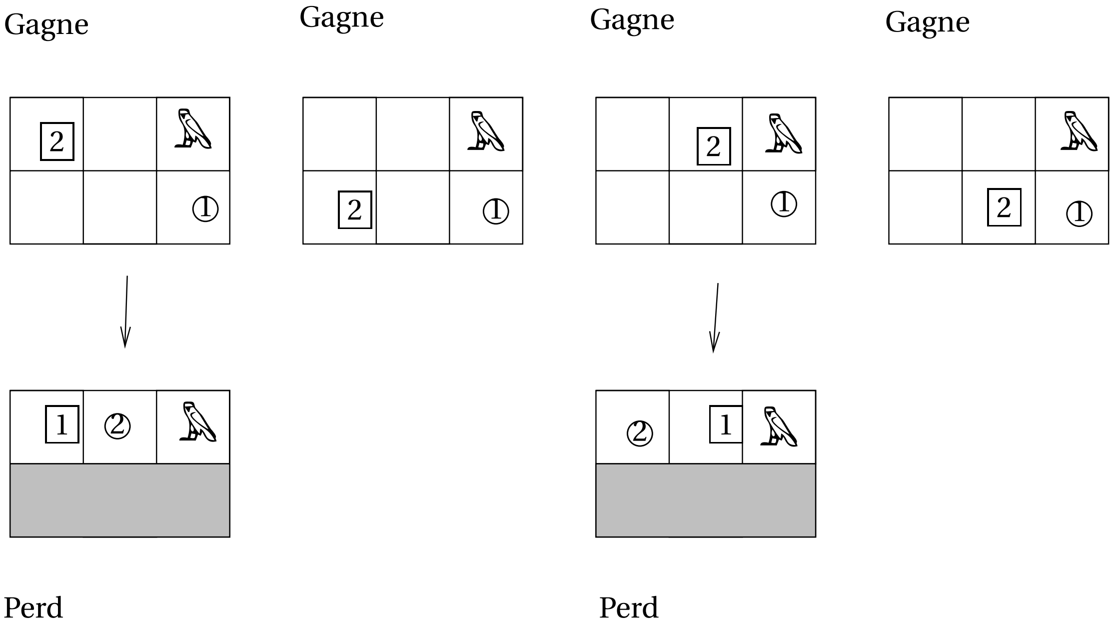
(4) Au final, nous obtenons le graphe suivant. Remarquez que nous avons 2 cas d'effondrements à droite. Pour trouver le statut « gagnant ou perdant » d'une configuration, nous commençons par la seconde ligne puis nous remontons à la première ligne en appliquant la règle 3.1. La ligne du bas correspond à des positions perdantes et celle du haut à des positions gagnantes.



(5) Nous concluons que la seule position gagnante de ① et de jouer en diagonale d'Anubis. Nous le savions déjà de part la solution du carré. Ce résultat précise que c'est l'unique stratégie gagnante dans ce cas ci.

3.2. **Cas du** 2×3**.** Dans ce cas la situation est beaucoup plus compliquée, pour simplifier nous pouvons éviter d'écrire les cas d'effondrement qui sont des cas simples. D'après la preuve du Corollaire 1, le cas à considérer est celui où le premier joueur se place en bas à gauche. Nous obtenons le graphe suivant.
Nous en déduisons que la position du joueur ① en bas à gauche n'est pas gagnante car, si le joueur $\boxed{2}$ se met sous la dalle d'Anubis, il gagne.
Nous avons alors l'idée de voler sa stratégie... et nous jouons donc le coup sous la dalle d'Anubis pour gagner. Nous obtenons la stratégie gagnante suivante :





4. Conclusion

Dans le cas 2×3, nous avons exploré le graphe du jeu et nous avons vu comment trouver une stratégie gagnante. Dans ce cas simple, nous pouvions le faire à la main et voir directement le coup gagnant (cf le cas avec 3 lignes ci-dessus). Cependant, l'idée des graphes peut nous permettre de traiter tous les cas. Supposons que la salle soit de taille $n \times p$.

Nous étudions toutes les configurations où 1 est en bas à gauche. Soit cette position est gagnante dans tous les cas et alors nous avons fini. Soit le joueur 2 peut gagner en se plaçant sur la dalle, notée G, et alors nous lui volons sa stratégie.

Ceci pourrait se programmer pour un rectangle général mais le faire à la main est assez long ☺