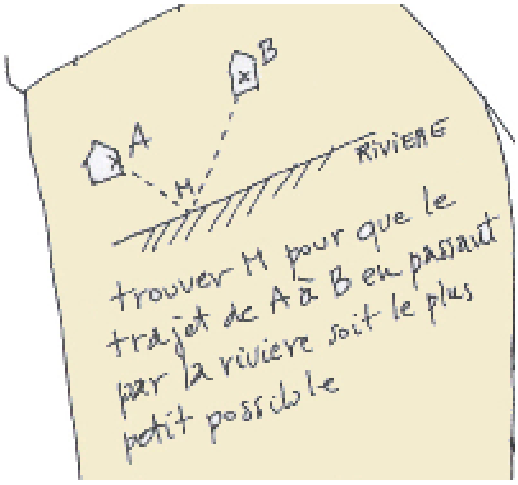
La rivière
Analyse Mathématique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

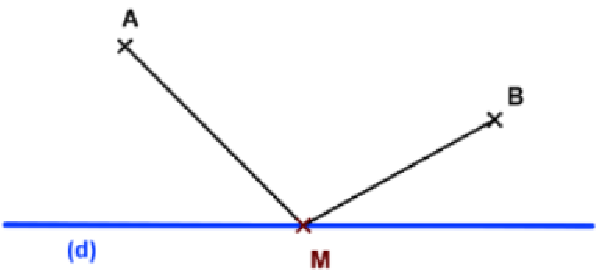


Cette situation a été expérimentée de très nombreuses fois aussi bien dans le second degré, qu'avec des étudiants préparant le CRPE ou encore par exemple lors de fêtes de la science. On pourra donc la mettre en œuvre dès le début du collège et avec tout groupe ne l'ayant jamais rencontrée.

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

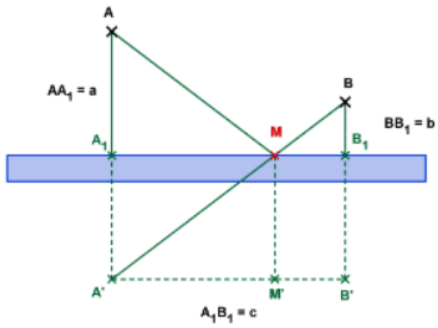
2.1 Avec une symétrie

Une solution géométrique utilise la réflexion et le plus court chemin d'un point à un autre.



Considérons (d) la droite matérialisant le bord de la rivière et le point A' symétrique de A par rapport au bord de la rivière. Soit alors M l'intersection de (d) et de $(A'B)$ et M' un autre point sur (d) on a : $AM + MB = A'B \leq A'M' + M'B = AM' + M'B$
et donc M permet bien d'obtenir le plus court chemin.

2.2 Avec une fonction



Voici une autre approche sans traverser la rivière (i.e. sans recours à la symétrie). Soit un point M quelconque entre A_1 et B_1 (ou plus généralement sur la droite (d)), notons de plus u la longueur du segment $[AM]$, v celle de $[BM]$ et notons $l(x)$ la longueur $u+v$ du chemin qui dépend de x ; plus précisément on a :

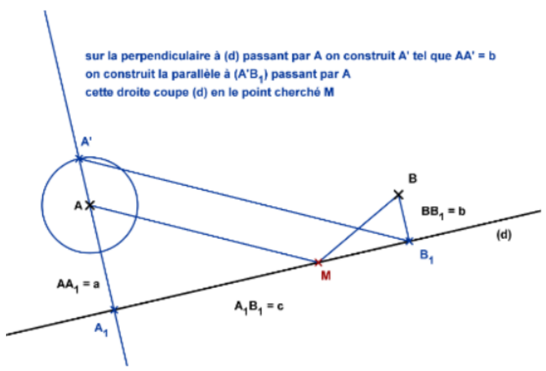
$$l(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

Minimiser cette longueur demande de trouver les zéros de la dérivée de cette fonction l.
Un calcul mène à l'équation : $(a+b)x = ac$, et on obtient un extremum.
L'étude du signe de la dérivée permet de conclure au plus court chemin.
On a ainsi déterminé le point solution et ce, sans se mouiller les pieds.
On a prouvé l'existence et l'unicité.
On retrouve la solution géométrique en notant que : $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{MM'}{BB'}$ avec les notations de la figure.

2.3 Avec un « miroir »

Changeons un peu le problème : « à la place de la rivière mettons un miroir, et de la maison A, braquons une torche électrique vers le miroir de telle manière que la lumière prévienne notre voisine dans la maison B que nous sommes bien rentrés ».
Alors il est clair ! que la solution est obtenue pour $\widehat{AMy} = \widehat{yMB}$ avec (My) perpendiculaire au miroir.
La justification de cette égalité d'angle provient de la considération du symétrique de A faite dans la page précédente.
Et elle permet alors d'obtenir de nombreuses solutions géométriques.

2.4 Avec le théorème de Thalès



Considérer le barycentre G du système $\{(A_1, b), (B_1, a)\}$.
En remarquant que : $\dfrac{A_1G}{A_1B_1} = \dfrac{a}{a+b}$, on retrouve le point solution.