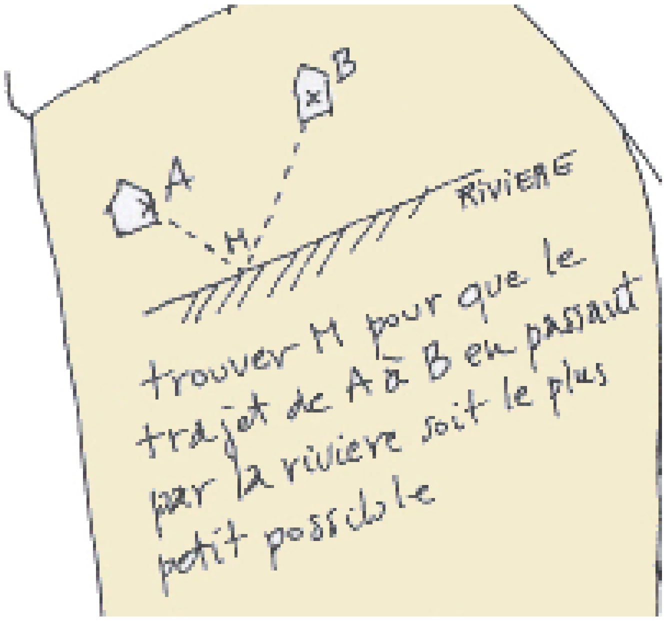
La rivière
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

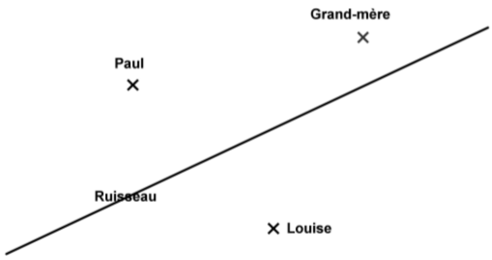
1 Énoncé du problème



2 Scénario(s) dans la classe

2.1 En cinquième

La grand-mère de Paul et de Louise ne peut plus se déplacer. Ses petits enfants vont chacun leur tour lui porter de l'eau qu'ils puisent au ruisseau. Un jour, c'est Paul qui fait le trajet : il va de chez lui au ruisseau, puise l'eau, puis la porte à sa grand-mère. Le lendemain c'est au tour de sa cousine Louise : elle part de chez elle, va aussi puiser l'eau au ruisseau et la porte à sa grand-mère. Les deux enfants sont toujours pressés et veulent prendre le chemin le plus court.



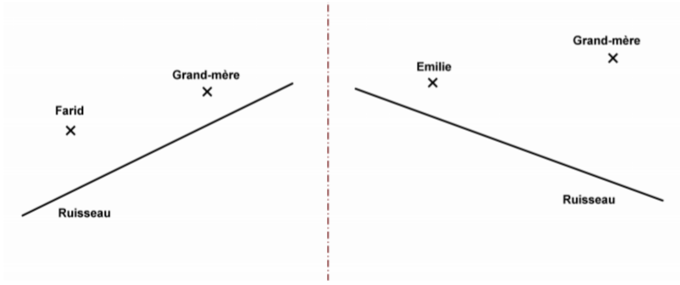
1. Pouvez-vous les aider en indiquant sur le plan les chemins qu'ils doivent emprunter ? (les maisons sont représentées par des points et le ruisseau par une droite.)

2. Paul et Louise ne sont pas d'accord. Paul dit que ce n'est pas juste car de toute façon, c'est toujours lui qui doit marcher le plus. Louise pense au contraire que c'est elle. Qui a raison ?

Consignes :
Le matériel de géométrie et la calculatrice sont autorisées.
Recherche individuelle (5min).
Par groupe de 3 ou 4 (20 min).

Chaque groupe rendra une feuille A3 du plan agrandi sur laquelle il indiquera les chemins à emprunter par Paul et Louise, ainsi que la longueur de chacun d'eux.

Deuxième recherche :
Trouver le plus rapidement possible mais de façon précise sur ce nouveau plan, le plus court chemin que peut emprunter Émilie pour aller puiser de l'eau, puis la porter à sa grand-mère.



Trouver le plus rapidement possible mais de façon précise sur ce nouveau plan, le plus court chemin que peut emprunter Farid pour aller puiser de l'eau, puis la porter à sa grand-mère

Analyse a priori :
Une solution experte : le chemin emprunté par Louise est représenté par un segment de 12 cm.

Si P' désigne le symétrique de P par rapport au ruisseau, le chemin le plus court que Paul peut emprunté sera de la même longueur que le segment [P'G]. Il peut être construit en joignant P à K point d'intersection du ruisseau avec la droite (P'G), puis K à G.

Le trajet ainsi obtenu mesure également 12 cm sur le plan.

Les 2 enfants ont donc la même distance à parcourir.

On peut vérifier cette égalité par mesurage (imprécis) ou par utilisation du compas pour effecteur les reports de longueur ou pour tracer un cercle de centre G et de rayon GL qui passe par P'.

Procédures envisagées :
- Tracé de perpendiculaires pour trouver le plus court chemin de chaque maison à la rivière, tracé d'un trajet maison de l'enfant -point le plus proche de la maison sur la rivière - bord de rivière - point le plus proche de la maison de grand-mère sur la rivière - maison de la grand-mère.
- Pour le trajet de Paul à sa grand-mère :
  - tracé d'un segment [PG], sans passer par la rivière
  - placement du point K approximativement (ou exactement) à l'intersection de la rivière et de la médiatrice de [PG].
  - essais organisés ou non de placement du point K, mesurage et réajustement vers une position optimale.
  - utilisation de P' ou de G' symétrique de G par rapport au ruisseau pour construire le point G.
- Pour la comparaison des longueurs des chemins, mesurage des segments, calcul de la longueur totale du chemin parcouru par Paul, comparaison des mesures obtenues.

Difficultés attendues :
- liées à l'appropriation du problème et en particulier à la compréhension du plan et par exemple associé le « ruisseau » à l'endroit où le mot « ruisseau » est écrit et non pas à la droite qui le représente.
- liées aux procédures à mettre en œuvre pour déterminer le chemin à emprunté par Paul : procédures qui s'avèrent fausses ou fastidieuses et peu efficaces, il semble peu probable qu'une procédure correcte apparaisse spontanément.
- liées aux imprécisions dues à la mesure, d'où la difficulté à valider les plus courts chemins et à les comparer.
- liées au calcul des additions permettant de calculer la longueur totale du chemin parcouru par Paul.

Quelques variables didactiques :
- choix de placer la maison de l'enfant d'un côté ou de l'autre de la rivière.
- choix de placer la maison d'un ou de plusieurs enfants, d'un même côté ou non de la rivière.
- choix de la pente donnée à la rivière, au segment [PG].
- choix de choisir ou non des chemins de même longueur.
- choix d'utiliser ou non un logiciel de géométrie dynamique pour chercher ou seulement pour valider.

- choix d'autoriser la calculatrice ou non.

Mise en œuvre envisagée :

- Appropriation du problème : les élèves lisent chacun silencieusement l'énoncé, puis il est reformulé par un ou deux élèves, le professeur s'assure en représentant le plan au tableau que chacun s'est approprié le plan de la situation. Puis il lance la recherche individuelle en précisant que chacun doit chercher à répondre d'abord à la première question.
- Recherche individuelle
- Recherche en groupe
- Mise en commun : après avoir constaté les différences entre les productions, la mise en commun porte sur les procédures utilisées : après l'exposé des groupes le débat devrait permettre d'invalider les procédures fausses et de faire ressortir la lourdeur et l'inefficacité de la procédure par essais. Si une procédure experte apparaît, elle sera soumise au débat et si possible justifiée par la classe. Dans un deuxième temps, les différences entre longueurs trouvées pour chacun des enfants devraient montrer la nécessité d'affiner le mesurage et justifier le recours à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Première synthèse au vidéo projecteur :
  A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le point K pourra d'abord être placé approximativement sur la rivière puis de façon plus précise par essais successifs.
  On pourra vérifier l'égalité des chemins par comparaison des mesures affichées, où en déplaçant L le long d'un cercle de centre G et de rayon LM.
  Dans ce cas, on pourra s'intéresser à la position particulière de L qui permet au segment [LM] de passer par K, remarquer l'égalité $PK = LK$.
  Le professeur encouragera les élèves à remarquer alors le positionnement du point L par rapport à P et demandera aux élèves si cette disposition particulière ne leur donne pas une idée pour construire plus rapidement et plus précisément le chemin que Paul devait emprunter.
- Nouvelle recherche individuelle :
  Consigne : « Trouver le plus rapidement possible mais de façon précise sur ce nouveau plan, le plus court chemin que peut emprunter Émilie pour porter de l'eau à sa grand-mère ». L'enseignant ramasse les productions des 4 ou 5 élèves les plus rapides, valide ou invalide leurs productions au calque.
- Mise en commun et synthèse : les élèves ayant réussi explique leur(s) méthode(s) au tableau. La classe se prononce sur l'efficacité des méthodes proposées. Puis chacun est invité à réinvestir la (ou une des) méthode(s) retenue(s) par la classe pour compléter la deuxième partie de la fiche qui sera collée dans le cahier est accompagnée d'une trace écrite du type :
  « Pour construire sur le plan, le plus court chemin que Farid peut emprunter on peut construire F', le symétrique de F par rapport à la droite et tracer le segment [F'G] qui est le plus court chemin possible pour joindre F' à G. Il coupe la droite en K.
  On a alors : $FK = F'K$ et $FK + KG = F'G$, le chemin F,K,G est de la même longueur que F'G donc le plus court possible. »
- Remarque : dans le cas où aucune méthode experte n'apparaît, le professeur pourra soit souligner des éléments de réponse intéressants et relancer une nouvelle fois la recherche. Si nécessaire il pourra présenter (comme venant d'une autre classe) et soumettre aux élève, une méthode permettant d'obtenir K en plaçant approximativement un point E' du côté de la rivière ne contenant pas le point E et en traçant [E'G].

2.2 En première S

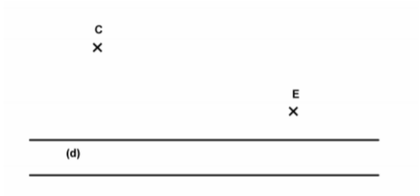
Classe de première S équipée de calculatrice TI-*n*spire

- Objectifs instrumentaux : Applications géométrie & graphique : construction de points libres, intersection, point sur objet, droites, segments, perpendiculaires, et déplacement de points. Relation entre les applications (tableur, géométrie, fonction).
- Objectifs mathématiques : à un niveau méta-mathématique, mise en place d'heuristiques, de raisonnements, allers-retours calculatrice-papier/crayon.
  Au niveau mathématique : propriété de la symétrie axiale, bissectrice et mesure d'angles ; mesure de distances, utilisation de la notion de fonction, organisation des données.

Une heure de travail de recherche en groupe
Prolongée par une narration de recherche.

Énoncé :

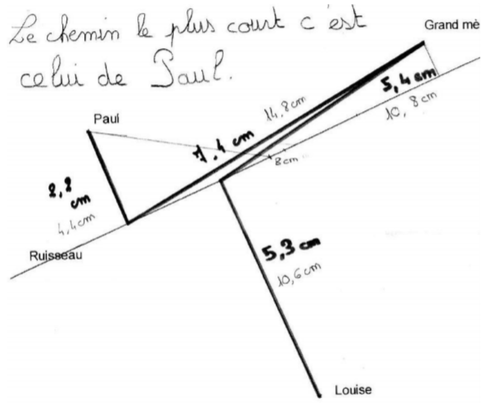
Un cavalier s'apprête à rentrer à l'écurie. Il se trouve actuellement en C. Toutefois il doit encore faire boire son cheval à la rivière proche et pour économiser sa monture parcourir le chemin le plus court.
Autrement dit, M étant un point de la droite (d), quelle est la position de M sur (d) pour que la somme des distances $CM + ME$ soit la plus petite possible ?

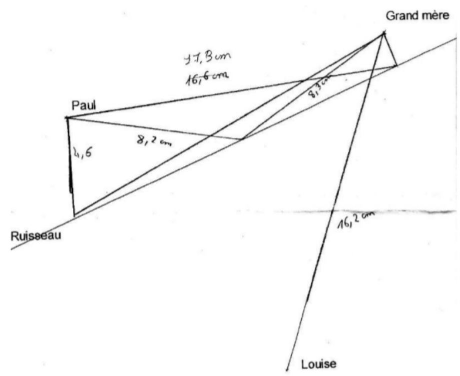


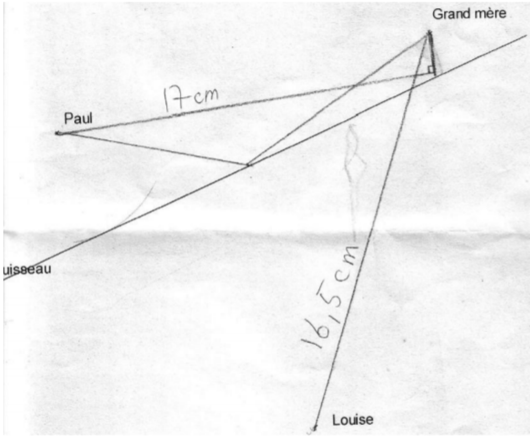
Premier temps : chercher sur la droite (d) le point M solution du problème posé. écrire les étapes de votre construction :
Deuxième temps : demander au professeur le fichier « tns » pour vérifier votre conjecture. Vous avez alors à construire sur la calculatrice votre solution ; votre point M devrait être sur le point S du classeur.
Dans ce scénario, les élèves ont à transposer une recherche faite dans l'environnement papier/crayon sur la calculatrice qui permet de contrôler la conjecture émise.
Dans un deuxième temps, les élèves ont à raconter leurs recherches sous une forme de narration de recherche ;

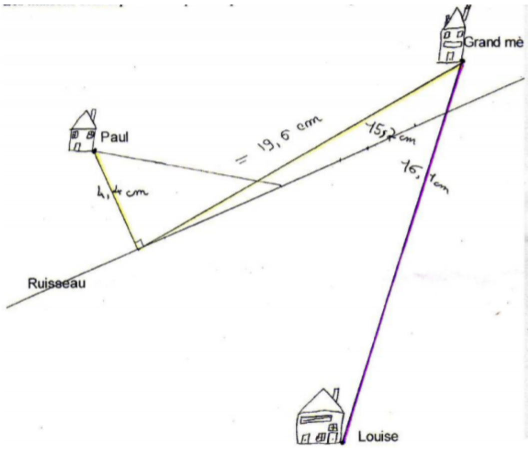
3 Production(s) d'élève(s)

3.1 En cinquième









Insistons sur quelques points :

- Les productions montrent ici la réutilisation de l'angle droit. Soit pour faire apparaÃ®tre le plus court chemin de la maison des enfants à la rivière, soit pour tracer un triangle rectangle dont un des sommets est sur la rivière.
- La difficulté concernant les mesures et le placement du point cherché est toujours présente. Elle l'est un peu moins avec le logiciel de géométrie dynamique mais elle persiste et l'utilisation du résultat de géométrie reste nécessaire.
- Ici l'appui sur le trajet de Louise a permis de faire émerger l'utilisation de la ligne droite et du symétrique dans le cas où la maison du petit-enfant et de la grand-mère sont du même coté du ruisseau. D'autres expérimentations sont nécessaires pour confirmer cet apport de ce scénario.
- Des collègues ont pu utiliser ce scénario comme activité de (ré)introduction de la symétrie en classe de sixième.

3.2 En première S

Première narration :

Aymeric
Dimitri
Nicolas

Mathématiques
Étude de problème

Notes

Observations :

Problème : "Un cavalier à la rivière"

- Pendant le cours : • La première chose qui nous est venue à l'esprit était de tracer les perpendiculaires à la droite d passant par les points C et E.

• Ceci nous donne alors les points A et B sur la droite d.

• Nous avons ensuite calculé les distances AB, CA et BE, pour trouver : AB = 10,3, CA = 5,7 et BE = 2,4

→ À partir de là, nous avons pensé qu'il pourrait exister un coefficient entre ces valeurs et la distance minimale entre C et E passant par d.

• Nous avons donc fait différents calculs, sans réussite :

$\frac{5,7}{2,4} = 2,375$; $\frac{10,3}{2,375} = 4,34\ldots$ etc.

- Après le cours : - le Mercredi après-midi (suite à la leçon sur les barycentres), nous avons essayés d'appliquer cette même leçon à notre problème.

→ Si l'on considère que les distances CA et EB correspondent aux poids appliqués aux points A et B, on peut appliquer la formule suivante :

$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2,4}{2,4+5,7}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2,4}{8,1}\overrightarrow{AB}$

• On obtient alors un nouveau coefficient : $\frac{2,4}{8,1}$.

Or : $\frac{2,4}{8,1} \times \overline{AB} = \frac{2,4}{8,1} \times 10,3 \simeq 3,0$.

→ On a trouvé ici une valeur de 3,00, toutefois on constate à l'oeil nu que : si l'on met le point M à 3 cm du point A, la somme des longueurs CM + ME n'est pas minimale.

• À partir de là, et ne trouvant pas de solutions, je décida alors de reprendre le problème du début.

Nouvelle méthode :

• Le problème demande de trouver le chemin le plus court entre deux points, passant par une droite.

→ On sait que le chemin le plus court entre 2 points est une droite. Étant donné qu'il faut passer par la rivière, la droite est impossible.

• Ainsi, il faut trouver l'emplacement du point M pour lequel CM + ME soit minimal.

→ Si l'on trace le symétrique de E par rapport à d, on trouve le point E'.

Or, étant donné que M appartient à d, on a ME = ME'.

Ainsi : CM + ME = CM + ME'

Or, la somme de ces deux longueurs est minimale lorsque C, M et E' sont alignés.

Ainsi, lorsque l'on trace la droite CE', on obtient le point M à l'intersection entre cette dernière et entre d.

→ Voir fichier calculette : on obtient CM + ME = 12,269, et MB = 3,00

On retrouve alors la valeur trouvée dans la précédente méthode. Toutefois il y a une étape que nous n'avons pas trouvée pour faire le lien.

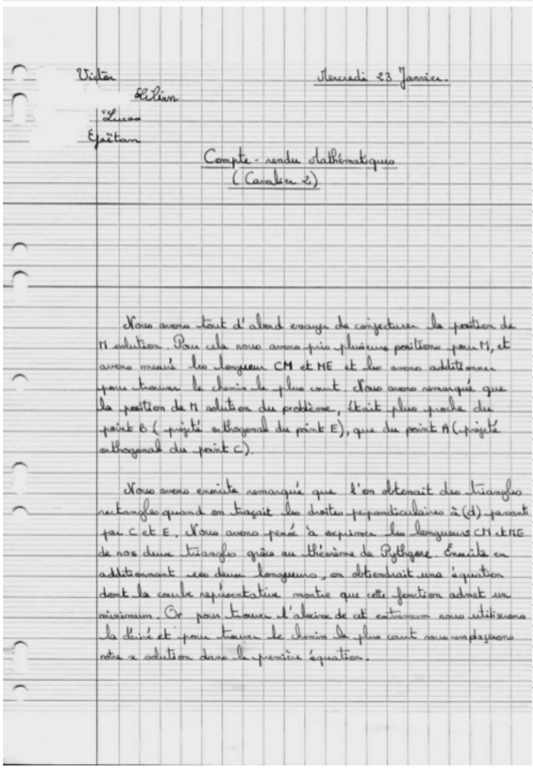
PS : la seconde page (calculs) comporte à la fin une méthode utilisée pour vérifier le résultat, celle de Pythagore.

(" $\sqrt{32,5+x^2} + \sqrt{109,8-20,4x+x^2}$ " est en réalité, la valeur CM + ME.)

→ On trouve à la fin : x = 7,2 ce qui correspond bien.

CM + ME vaut alors environ 13.

Deuxième narration :



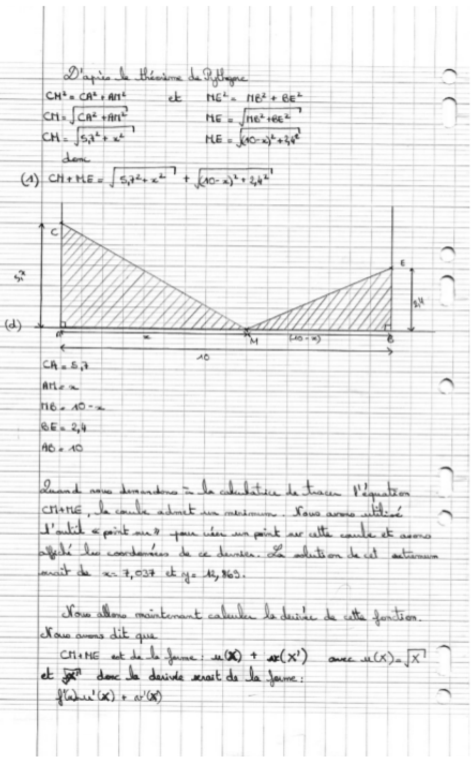
Victor
Lilian
Lucas
Gaëtan

Mercredi 23 Janvier

Compte-rendu Mathématiques
(Cavalier 2)

Nous avons tout d'abord essayé de conjecturer la position de M solution. Pour cela nous avons pris plusieurs positions pour M, et avons mesuré les longueurs CM et ME et les avons additionner pour trouver le chemin le plus court. Nous avons remarqué que la position de M solution du problème, était plus proche du point B (projeté orthogonal du point E), que du point A (projeté orthogonal du point C).

Nous avons ensuite remarqué que l'on obtenait des triangles rectangles quand on traçait les droites perpendiculaires à (d) passant par C et E. Nous avons pensé à exprimer les longueurs CM et ME de nos deux triangles grâce au théorème de Pythagore. Ensuite en additionnant ces deux longueurs, on obtiendrait une équation dont la courbe représentative montre que cette fonction admet un minimum. Or pour trouver l'abscisse de cet extremum nous utiliserons la dérivé et pour trouver le chemin le plus court nous remplacerons notre x solution dans la première équation.



D'après le théorème de Pythagore

$CM^2 = CA^2 + AM^2$ et $ME^2 = MB^2 + BE^2$

$CM = \sqrt{CA^2 + AM^2}$ $ME = \sqrt{MB^2 + BE^2}$

$CM = \sqrt{5,7^2 + x^2}$ $ME = \sqrt{(10-x)^2 + 2,4^2}$

donc

(1) $CM + ME = \sqrt{5,7^2 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 2,4^2}$

CA = 5,7

AM = x

MB = 10 - x

BE = 2,4

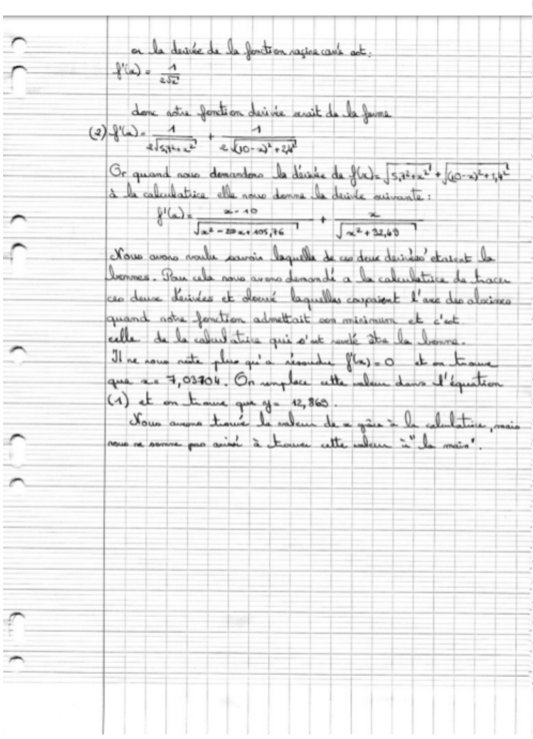
AB = 10

Quand nous demandons à la calculatrice de tracer l'équation CM + ME, la courbe admet un minimum. Nous avons utilisé l'outil « point sur » pour créer un point sur cette courbe et avons affiché les coordonnées de ce dernier. La solution de cet extremum serait de x = 7,037 et y = 12,869.

Nous allons maintenant calculer la dérivée de cette fonction. Nous avons dit que

CM + ME est de la forme : $u(X) + v(X')$ avec $u(X) = \sqrt{X}$ et $\sqrt{X'}$ donc la dérivée serait de la forme :

$f'(x) = u'(X) + v'(X)$



on la dérivée de la fonction racine carré est :

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc notre fonction dérivée serait de la forme

(2) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5,7^2+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{(10-x)^2+2,4^2}}$

Or quand nous demandons la dérivée de $f(x) = \sqrt{5,7^2+x^2} + \sqrt{(10-x)^2+1,4^2}$ à la calculatrice elle nous donne la dérivée suivante :

$f'(x) = \frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+105,76}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+32,49}}$

Nous avons voulu savoir laquelle de ces deux dérivées étaient la bonnes. Pour cela nous avons demandé a la calculatrice de tracer ces deux dérivées et observé laquelles coupaient l'axe des abscisses quand notre fonction admettait son minimum et c'est celle de la calculatrice qui s'est revelé être la bonne.

Il ne nous reste plus qu'a résoudre $f'(x) = 0$ et on trouve que $x = 7,03704$. On remplace cette valeur dans l'équation (1) et on trouve que $y = 12,869$.

Nous avons trouvé la valeur de x grâce à la calculatrice, mais nous ne sommes pas arrivé à trouver cette valeur à "la main".

On remarque aussi que si l'on change les longueurs CA et BE, alors notre solution du point M sera changée également. Il faut donc remplacer les longueurs CA et BE par des lettres dans notre équation. (et aussi la longueur AB)

CA = a AB = c

BE = b

CM = $\sqrt{a^2+x^2}$ et ME = $\sqrt{(c-x)^2+b^2}$

$g(x)$ CM + ME = $\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(c-x)^2+b^2}$

Quand, on obtient cette équation, on calcule sa dérivée et on a :

$g'(x) = \frac{x-c}{\sqrt{x^2-2cx+b^2+c^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Et il nous suffit de remplacer les lettres a, b et c par les longueurs que l'on veut et résoudre $g'(x) = 0$ et on obtient la solution de x pour des longueurs données.

Troisième narration :

Camille . 1ère S3 .

. Rema .

. Jessica

Mathilde . Un cavalier à la rivière .

. Méthode :

On a tracé la perpendiculaire passant par C qui coupe d en A puis on a tracé la perpendiculaire passant par E qui coupe d en B. On a ensuite tracé la droite (CB) puis (EA). On a ensuite tracé la perpendiculaire passant par D, le point d'intersection des 2 droite (CB) et (EA) qui coupe d en H
Donc H est le point de la solution du problème .

Avec le fichier « ms » on a pu remarquer que la solution est valable même lorsque l'on deplace le point C (ou le point E) .

. Demonstration :

$R_1 \times h_1 = R_2 \times h_2$

CA × AH = EB × BH

5,7 × y = 2,35 × x	et 5,7 × x = 2,35 × y
5,7 (10,25 - x) = 2,35x	5,7x = 2,35 (10,25 - x)
58,425 - 5,7 x = 2,35x	5,7x = 24,0875 - 2,35x
58,425 = 1,05 x	1,05x = 24,0875
x = 7,3	x = 3
AH = 7,3 cm .	BH = 3cm .

donc $2,35\vec{AH} = 5,7\vec{AB} = \vec{0}$

Dans les triangles CGF et CHE, on a :

G ∈ a (CH)

F ∈ à (CE)

(GF) // (HE)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{CF}{CE} = \frac{CG}{CH} = \frac{FG}{EH}$

$\frac{CF}{CE} = \frac{FG}{EH}$ $\frac{7,5}{10,9} = \frac{2,7}{EH}$ EH = 4 cm .

$\frac{CF}{CE} = \frac{CG}{CH}$ $\frac{7,5}{10,9} = \frac{6,5}{CH}$ CH = 9 cm .

× 1,27 $2,35\vec{AH} = 5,7\vec{AB} = \vec{0}$

$3\vec{AH} = 4,3\vec{AB} = \vec{0}$

$3,2\vec{AH} = 7,5\vec{AB} = \vec{0}$ + 0,2 .

donc

$\vec{CF} + \vec{FE} = \vec{CH} + \vec{HE}$

donc $\vec{CH} + \vec{HE}$ est bien le chemin le plus court .

* J'ai tracé la droite (CE) puis la perpendiculaire à (GF) et (HE) passant par G .

(FB) perpendiculaire à (GF) et (HE) .

Si une droite est perpendiculaire à 2 droites alors les 2 droites sont parallèles entre elles .

Donc (GF) parallèle a (HE)

demonstration par aire dans CAH et HEB

aire d'un triangle $\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$

CAH et HEB sont deux triangles rectangles en B et en A car on sait que CA est ⊥ à d et EB est ⊥ à d. Donc leurs hauteurs sont respectivement CA et EB.
on sait par notre demonstration par Thalès que EH = 4 cm et CH = 9 cm.
donc $CAH = \frac{(10{,}25 - x) \times 5{,}7}{2}$

et $ENB = \frac{x \times 2{,}4}{2}$

l'aire totale des deux triangles ~~sont~~ est :

$AT = \frac{5{,}7\,(10{,}25 - x) + 2{,}4x}{2}$

$AT = \frac{58{,}425 - 5{,}7x + 2{,}4x}{2} = \frac{58{,}425 - 3{,}3x}{2}$

on obtient donc une fonction qui est
$= \frac{58{,}425 - 3{,}3x}{2} = \frac{1}{2}\,(58{,}425 - 3{,}3x)$

cette fonction est de la forme $k \times u$
avec $k = \frac{1}{2}$ et $u = 58{,}425 - 3{,}3x$
donc $u'(x) = -3{,}3$
la dérivé est donc $k \times u'$
$AT'(x) = \frac{1}{2} \times (-3{,}3) = \frac{-3{,}3}{2}$

ce résultat ne ~~me~~ nous mènent à rien, nous avont donc abandonnée cette méthode ~~avec~~ après plusieurs essais (dans le triangle CBA et AEB)

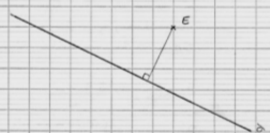
Quatrième narration :

Matthias
David
Aymeric
Elio
1eS3

D.M. Mathématiques.

1ère méthode :

Tracer une perpendiculaire entre C et E passant par D. On a essayé de tracer la perpendiculaire (les 2 points sont A et B) car on sait que le plus court chemin d'un point a une droite est sa perpendiculaire.



Donc pour se faire on a tracé un cercle de diamètre [CE] grâce à la définition d'un triangle rectangle dans un cercle.
On obtient 2 points sur la droite d qui permettent de créer 2 triangles rectangles.
On a abandonné cette méthode car en prenant un point au hasard entre les 2 angles droits on trouve une mesure inférieure.

2ème méthode :

On a essayé Thalès mais dans nos conditions elle ne pouvait pas fonctionner, les droites n'étaient pas parallèles.

3ème méthode :

On ~~a~~ trace les 2 perpendiculaire à d passant par C et E. les 2 points obtenus on une distance de 10,2 cm sur la droite d. On prend un point au hasard sur ce segment de longueur x entre A et B. On trace ensuite la trajectoire du cavalier, ça forme 2 triangles rectangles.
On calcule ensuite l'aire minimale des 2 triangles.

$A_{\text{triangle}_1} = \frac{5{,}7 \times x}{2}$

$A_{\text{triangle}_2} = \frac{(10{,}2 - x) \times 2{,}3}{2}$

$A = A_1 + A_2$

$A = \frac{5{,}7 \times x}{2} + \frac{(10{,}2 - x) \times 2{,}3}{2} = \frac{5{,}7x}{2} + \frac{23{,}46 - 2{,}3x}{2}$
$= \frac{3{,}4x + 23{,}46}{2}$

$= 1{,}7x + 11{,}73$

$f'(x) = 1{,}7$
On voit que ça ne peut pas marcher car c'est une fonction sans extrémum car la dérivé est une fonction constante.

Cinquième narration :

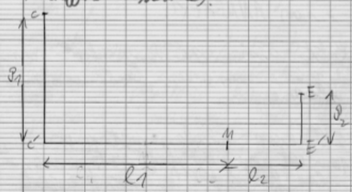
FELIX
JOHN
PAUL
THOMAS

1S3

Compte rendu du problème
"Un cavalier à la rivière"

1er essai : les barycentres

en voyant ce problème, nous avons tout de suite eu l'idée d'utiliser les barycentres grâce à la loi d'archimède.
nous nous sommes donc servis de cette formule :
$\mathcal{P}_1 \times l_1 = \mathcal{P}_2 \times l_2$.
voici sur la figure ci-dessous, à quoi correspondent les différentes variables :



nous avons donc essayé de calculer le point M à partir de l'exemple ci-dessus (ici, $\mathcal{P}_1 = 5$cm ; $\mathcal{P}_2 = 2$cm et $l_1 + l_2 = 10$cm)

$\mathcal{P}_1 l_1 = \mathcal{P}_2 l_2$
$5 l_1 = 2 l_2$
$l_2 = 2{,}5 l_1$

nous avons donc trouvé que la longueur l_2 valait 2,5 fois la longueur l_1. ainsi :
$2{,}5 l_1 + l_1 = 10$
$3{,}5 l_1 = 10$

Mais après avoir essayé ce résultat nous avons remarqué qu'il était faux. et en faisant des tests, nous nous sommes rendus compte que l_1 et l_2 auraient dû être inversés (l_1 devait être égal à $\frac{50}{7}$ cm et l_2 à $\frac{20}{7}$ cm).
nous avons donc voulu chercher une explication mais nous n'en avons pas trouvé.

Nous sommes donc passés à un nouvel essai

2ème essai : nouveau test avec les barycentres.

→ voir ANNEXE 1.

Cet essai ne nous ayant pas plus avancé, nous avons tenté une méthode différente :

3ème essai : calculs géométriques.

pour cet essai, les points sont nommés de la même façon que les essais précédents.

Nous avons essayé de tracer sur un exemple de la figure les droites (CE'), et (C'E). puis nous avons tracé la perpendiculaire à la rivière (C'E') passant par le point d'intersection de (CE') et (C'E) puis nous avons placé le point M à l'intersection de (C'E') et de la perpendiculaire construite précédemment.
nous avons ainsi fait 4 tests (voir ANNEXE 2)

Ces tests nous ont permis de remarqué qu'à chaque fois $CC' \times ME' = EE' \times C'M$.
(voir les calculs sur l'annexe 2)
Nous avons donc décidé d'approfondir cette méthode.
ainsi, nous avons choisi des variables en essayant de prendre celles qui nous conviendraient le mieux. (voir annexe 2 : "choix des variables")
après deux essais nous avons décidé de prendre les variables suivantes :
$CC' = x$
$C'M = y$.

ensuite, nous avons tenté de calculer y en fonction de x, en refaisant une figure à laquelle nous avons ajouté le chemin suivi par le cavalier. (voir annexe 2 : "calcul de y en fonction de x"). puis, nous avons fait nos calculs grâce au théorème de pythagore
nous avons trouvé la relation suivante :
$CM = \sqrt{x^2 + y^2}$
elle nous a permis de continuer nos calculs (voir suite sur annexe 2).
ces calculs nous ont menés à $y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x^2$
nous n'avons pas réussi à continuer le calcul.
nous avons donc tenté une résolution avec la fonction "solve" de la calculatrice.
elle nous a affirmé que :
$y = \sqrt{1-2x}$ ou $y = -\sqrt{1-2x}$ ou $y = 0$ (avec $2x-1 \leq 0$)
(voir fichier "résolution")

cela ne nous a donc pas donné de résultat satisfaisant. et nous avons abandonné cette méthode.

Parmi les 3 méthodes essayées, aucune ne nous a donné de solution.
Mais la méthode des barycentres (la 1ère) était très proche de la réponse (elle était inversée). Nous avons donc retenté de trouver d'où venait cette inversion des résultats.
Mais c'était encore une fois sans succès.

Nous n'avions donc plus d'idées pour trouver la position du point M.
Nous n'avons donc pas trouvé de formule même si nous étions très proches durant chacun de nos essais.

ANNEXE 1

Mathématiques

Compte rendu

hypothèse : On suppose, puis que la somme des distances CM + ME est la plus petite possible que CM et ME doivent être égales.

Grâce à la résolution graphique on sait que CE : 10,75 cm (d'après l'exemple de l'énoncé).

On reporte le point C sur la droite (d) grâce à la droite perpendiculaire de (d) passant par C. On nomme C' le point d'intersection.

On reporte le point E sur la droite (d) grâce à la droite perpendiculaire de (d) passant par E. On nomme E' le point d'intersection.

Avec l'aide du graphique, on mesure la valeur de C'M'. On trouve C'E' : 10,25 cm.

Selon la loi d'Archimède on peut avancer que :

$P_1 \times l_1 = P_2 \times l_2$

On remplace les valeurs P_1 et P_2 par les valeurs des droites CC' et EE'

Grâce à la méthode graphique, on trouve :

CC' : 5,7 cm
EE' : 2,35 cm

On sait que C'E' : 10,25 cm

Si M point de C'E' alors

C'M : x   ME' : 10,25 − x

Si on applique la loi d'Archimède avec P_1 : CC'
P_2 : EE'

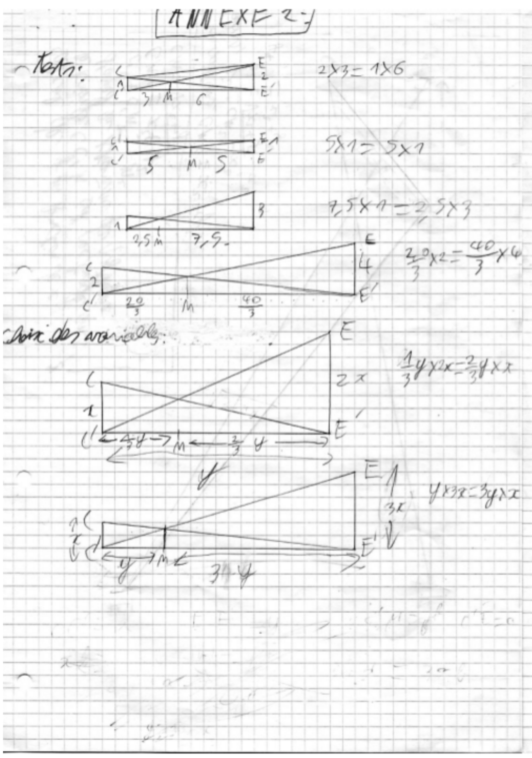
Alors :

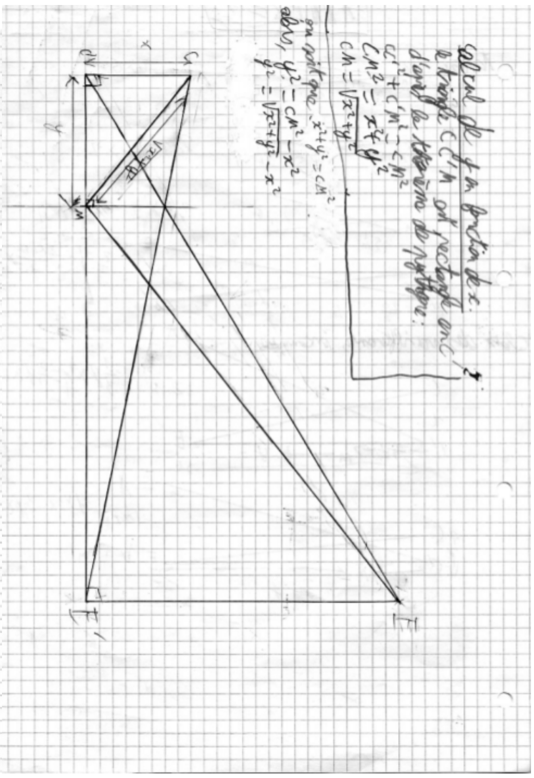
CC' × C'M : ME' × E'E

$\frac{CC'}{E'E} = \frac{ME'}{C'M}$

$\frac{5,7}{2,35} = \frac{ME'}{C'M} = 2,42$

Donc M se trouve soit à 2,42 cm de C' soit à 2,42 cm de E'. La relation trouvée ne nous permet pas de savoir où le point M doit être exactement.
Mais on peut déduire par logique que M est plus proche de E' (chose que nous n'avons pas pu prouver)





Dutte Thomas groupe 5 1-S_3
Notariacomo Paul
Julien Felix Maths
Picard John Contrecarder

En utilisant les aires des triangles.

1) On place sur la droite d les points C' et E', image respective de C et E.
Puis un point M sur d entre C' et E'
En utilisant les aires des triangle C'MC et E'ME et en deplaçant le point M sur d, on cherche le trajet le plus court pour le trajet C, M, E.
La distance C'M est appelé x.
On calcule les aires des triangles pour $x=1$, $x=2$ $x=3$

x	$\frac{(2,35 \times x)}{2}$ (m²)	x - 10,25	$\frac{(5,7 \times x)}{2}$ (m²)	aire totale (m²)
1	1,178	9	25,65	26,82
2	2,35	8	22,8	25,15
3	3,525	7	19,95	23,475
4	4,7	6	17,1	21,8
5	5,855	5	14,25	20,105
6	7,05	4	11,4	18,45
7	8,225	3	8,55	17,1
8	9,4	2	5,7	15,1
9	10,575	1	2,85	13,425

La réponse serai $x=8$, ce qui n'est pas le cas.
Ce n'est pas grace a l'aire mais grace a la longueur de l'hypothénuse que l'on trouve la réponse.

x	$\sqrt{(2,35^2+(10,25-x)^2)}$ (cm)	$\sqrt{(5,7^2+x^2)}$ (cm)
1	9,54	5,78
2	8,57	6,04
3	7,62	6,47
4	6,67	6,96
5	5,75	7,58
6	4,85	8,27
7	4,01	9,02
8	3,25	9,82
9	2,66	10,65

Le trajet total =
x 1 = 15,32 cm — 6 = 13,12 cm
2 = 14,61 cm — 7 = 13,03 cm
3 = 14,06 cm — 8 = 13,07 cm
4 = 13,63 cm — 9 = 13,31 cm
5 = 13,33 cm

La bonne reponce est donc $x=7$.
Evidement c'est une valeur approximative avec une certaine marge d'erreur, il faut donc cible les recherches en $x=6$ et $x=8$ et ainsi de suite, jusqu'à avoir une erreur la plus petite possible.

Sixième narration :

Michael
Amélie
Anthony
Emilie

Un cavalier à la rivière — 1ère S_3 — 26.01.08

GROUPE n°6

1ère méthode

- Construction
- Tracer le segment [CE] et appeler I son milieu.
- Tracer la perpendiculaire à [CE] passant par I. (médiatrice)
- On appel M le point d'intersection de la perpendiculaire avec la droite d.

- Verification avec le dessin calculatrice Ti 5.

Le point M ne correspond pas au point S solution du problème.
La méthode ne fonctionne pas.

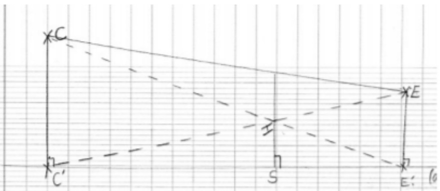
- Dans qu'elle circonstance cette méthode marcherait ?

Lorsque la droite (CE) est parallèle à la droite d.

2ème méthode

- Construction.

-



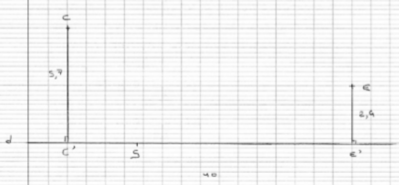
- Tracer les perpendiculaires à (d) passant par C et E que l'on nomme respectivement C' et E'.
- Tracer [CE].
- On obtient le parallélogramme CC'E'E.
- Puis tracer les diagonales de celui-ci.
- Le point d'intersection de celles-ci se nomme I.
- Tracer la perpendiculaire à (d) passant par I.
- On obtient alors le point S solution du problème.

- Vérification de cette méthode à la calculette.

Méthode juste.

3ème méthode

Construction



- Je reporte le point C sur la droite d en traçant la perpendiculaire à d passant par C, le point d'intersection est nommé C'. Puis, je fais pareil avec le point E sauf que point d'intersection est nommé E'.

Méthode

La distance du segment [CC'] est de 5,7 cm et ainsi on obtient le point pondéré (C'; 5,7).
De plus, la distance du segment [EE'] est de 2,4 cm et ainsi on obtient le point pondéré (E'; 2,4)
La distance de la droite (C'E') est de 10 cm

Ainsi le but de cette méthode est de trouver le barycentre S des points pondérés (C'; 5,7) et (E'; 2,4) où S serait solution du problème.

$$5{,}7\,\vec{SC'} + 2{,}4\,\vec{SE'} = \vec{0}$$
$$5{,}7\,\vec{SC'} + 2{,}4\,(\vec{SC'} + \vec{C'E'}) = \vec{0}$$
$$5{,}7\,\vec{SC'} + 2{,}4\,\vec{SC'} + 2{,}4\,\vec{C'E'} = \vec{0}$$
$$(5{,}7 + 2{,}4)\,\vec{SC'} = -2{,}4\,\vec{C'E'}$$
$$SC' = \frac{2{,}4}{5{,}7+2{,}4}\,C'E'$$
$$SC' = \frac{2{,}4}{8{,}1}\,C'E'$$
$$SC' = \frac{2{,}4}{8{,}1} \times 10$$
$$SC' = 2{,}9$$

- Vérification avec le dossier calculatrice TNS

On peut voir que notre solution est opposée à celle de la calculatrice. Il aurait fallu trouver $SE' = 2{,}9$
La méthode est donc fausse.

- Dans qu'elle circonstance cette méthode marcherait ?

Cette méthode marcherait si les pondérations auraient été inversées. C'est-à-dire s'il y avait eu (C'; 2,4) et (E'; 5,7) car :

$$SC' = \frac{5{,}7}{2{,}4+5{,}7}\,C'E'$$
$$SC' = \frac{5{,}7}{8{,}1}\,C'E'$$
$$SC' = \frac{5{,}7}{8{,}1} \times 10$$
$$SC' = 7{,}1$$

Et ainsi par soustraction de $C'E' - SC'$ on retrouve bien la solution de la calculatrice.

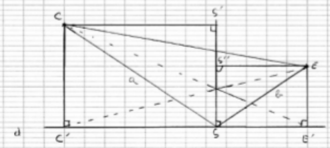
$E'S = C'E' - SC'$ (Relation Chasles)
$E'S = 10 - 7{,}1$
$E'S = 2{,}9$

GROUPE 6

Compte rendu de la calculatrice (suite).

Après avoir trouvé S avec les diagonales du polygone CC'E'E on peut utiliser une méthode similaire à l'exercice vu en cours et avec le calcul de longueurs de la calculatrice.
On trace un rectangle avec la perpendiculaire à d passant par C puis grâce à la perpendiculaire à d passant par l'intersection des diagonales de CC'E'E.
Le rectangle ainsi obtenu est CC'SS' on trace la diagonale CS de longueur a
Puis on trace le rectangle EE'SS'', on trace ensuite sa diagonale ES de longueur b.

Avec cette méthode on peut donc connaître la valeur de CS + SE même quand l'on déplace C ou E ; mais cette méthode est possible que lorsque l'on a découvert S



$a + b = CS + SE$.

Septième narration :

Kristell
Anne-Sophie
Franklin

1°S3
24/01/08

DM : Un cavalier à la rivière

Pour arriver à la bonne réponse, nous avons tout d'abord réfléchit sur la façon de trouver le chemain le plus court pour relier C et E en passant par un point de la droite "d" noté M_1.
Nous avons, ~~le~~ en premier tracer le chemain le plus court entre ~~d~~ le point C et la droite "d", de même pour le point E. On a notté les point A et B, l'intersection de la droite perpendiculaire à "d" passant par C et à "d" passant par E.
On a ensuite cherché le milieu du segment [AB], noté M_1.
On a ici supposé avoir trouver le chemain le plus court avec $AM_1 = M_1E$.
On a alors demander le fichier « tass » pour vérifier notre conjecture. On a construit à la calculatrice notre solution. ~~Le point~~
Nous nous sommes apperçu que ce n'était pas la bonne solution, car celle-ci marchait seulement si ~~les point C et~~ la droite (CE) est parallèle à la droite "d".

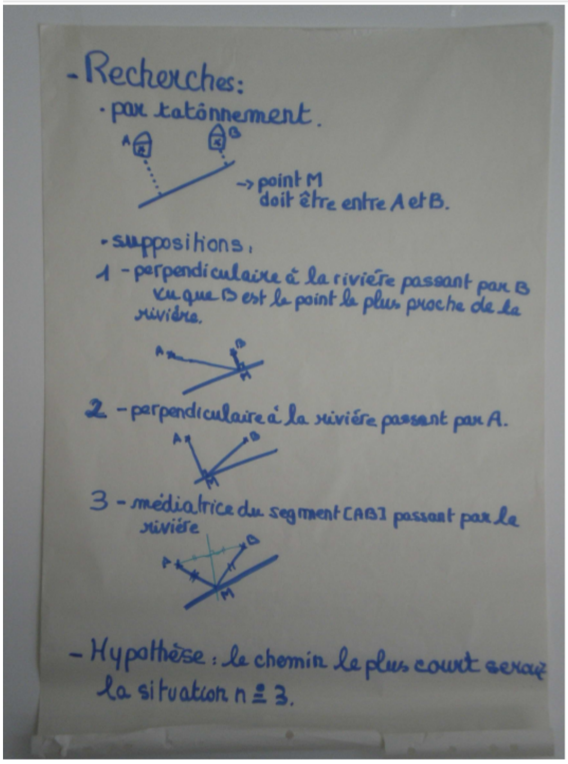
Pour trouver une autre methode, on a conserver sur le dessin les segments [CA] et [EB]. On a tracer les droites (CB) et (AE), le point d'intersection de ces 2 droite est noté N.

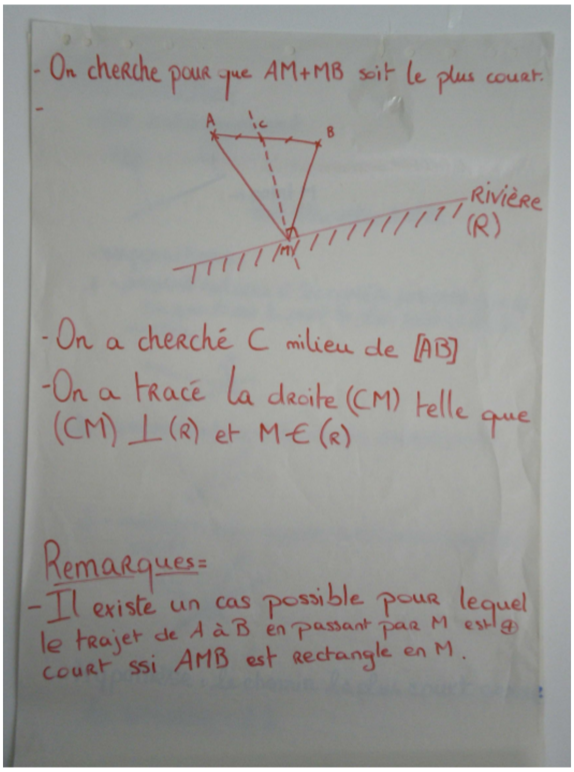
On a alors supposé que la droite perpendiculaire à la droite "d" passant par le point N, le point d'intersection noté M_2, était le chemain le plus court.
On a tracer les segments sur la calculatrice.
On c'est apperçu qu'on avait la bonne réponse, car quand on déplace les points C et E, notre point M_2 se déplaçait en même temps que le point S de la ~~figure~~ réponse donné.
Sur notre figure on a : (on prend M pour M_2)
(CA), (MN) et (EB) perpendiculairent à la droite "d"
Donc (CA), (MN) et (EB) sont parallèles entre eux.
On c'est alors apperçu que pour trouver le point M, on avait utilisé le theorème de thalès.
On a alors ecrit toutes les egalitées :
Dans le triangle : 1* AEB, $\begin{Bmatrix} A,N,E \\ A,M,B \end{Bmatrix}$ sont alligné de plus (NM) // (EB)
on a donc : $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{NM}{EB}$
2* ABC $\begin{Bmatrix} A,M,B \\ C,N,B \end{Bmatrix}$ allignés de plus (NM) // (CA)
on a donc : $\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{NM}{CA}$
3* $\begin{Bmatrix} C,D,F \\ A,D,N \end{Bmatrix}$ allignés de plus (NM) // (AC)
on a donc : $\frac{ND}{AD} = \frac{MD}{DC} = \frac{NM}{AC}$
4* $\begin{Bmatrix} N,F,B \\ M,F,E \end{Bmatrix}$ sont allignés de plus (NM) // (BE)
on a donc : $\frac{NM}{EB} = \frac{NF}{FB} = \frac{MF}{FE}$
5* $\begin{Bmatrix} C,N,B \\ A,N,E \end{Bmatrix}$ sont allignés de plus (CA) // (BE)
on a donc : $\frac{BN}{NC} = \frac{EN}{NA} = \frac{EB}{CA}$

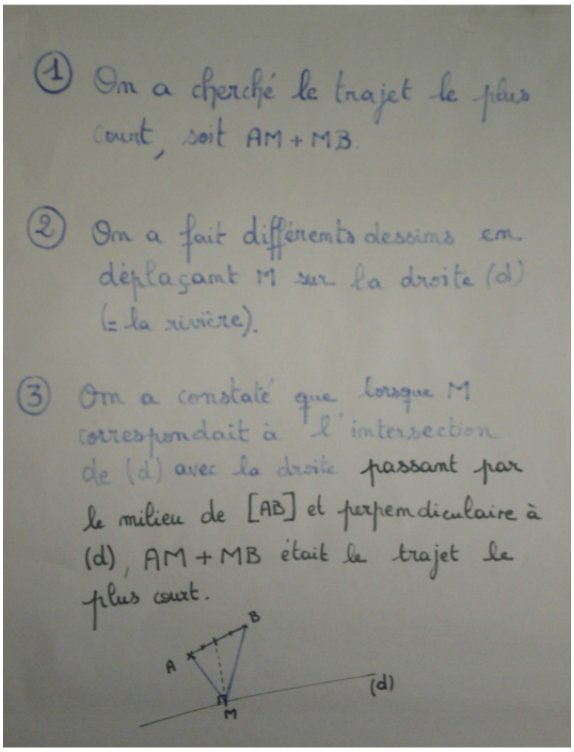
On veut connaitre [BM] ou [AM]
Donc on supprime donc les trois dernières expretions de thalès.
Il nous reste thalès dans ABC et ABE.
pour chaques égalitées, on va prendre les 2 ~~premières~~ égalitées qui nous interesse pour connaitre [BM] et [AM]
~~Pour~~ Nous avons pris, pour [AM] le triangle AEB, on a donc cette expretion : $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{NM}{EB}$
Nous ne connaisson rien des droites (AN) et (AE) donc on ne se servira que de $\frac{AM}{AB}$, car on ~~connait~~ connait AB, et $\frac{NM}{EB}$ car EB est une distance donné par le graphique.
on a donc :
$MN = \frac{EB \times AM}{AB}$, on exprime le calcule en fonction de MN pour le pouvoir le remplacer par la suite par une expretion litérale.
Pour [BM] nous avons pris ABC, on a donc ~~cette~~ expretion :
$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{NM}{CA}$
On veut trouver [BM], on ne connaît aucunes distances de [BN], ni de [BC] donc on se sert de $\frac{BM}{BA} = \frac{NM}{CA}$, on a donc :
$BM = \frac{BA \times NM}{CA}$.
On remplace NM dans l'expretion de BM, on a donc :
$BM = \frac{BA}{AC} \times MN \Leftrightarrow BM = \frac{BA}{AC} \times \frac{BE \times AM}{AB}$
$BM = \frac{BE \times AM}{AC}$

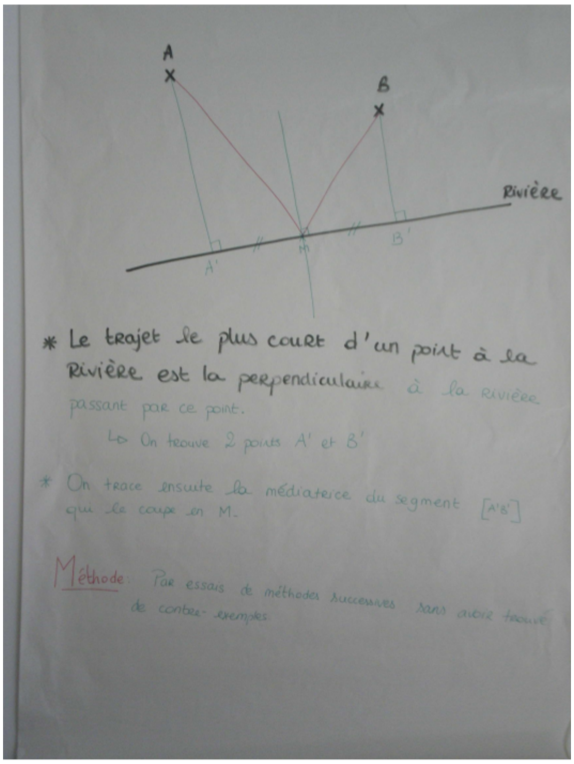
$BM = \frac{BE}{AC} \times AM = \frac{BE}{AC} \times (AB - BM)$
$BM = \frac{BE}{AC} \times AB - \frac{BE}{AC} \times BM$
$BM + \frac{BE}{AC} \times BM = \frac{BE}{AC} \times AB$
$BM\left(1 + \frac{BE}{AC}\right) = \frac{BE}{AC} \times AB$
$BM\left(\frac{AC + BE}{AC}\right) = \frac{BE}{AC} \times AB$
$\boxed{BM = \frac{BE \times AB}{AC + BE}}$ par cette formule on a aussi :
$\boxed{AM = \frac{CA \times AB}{AC + BE}}$

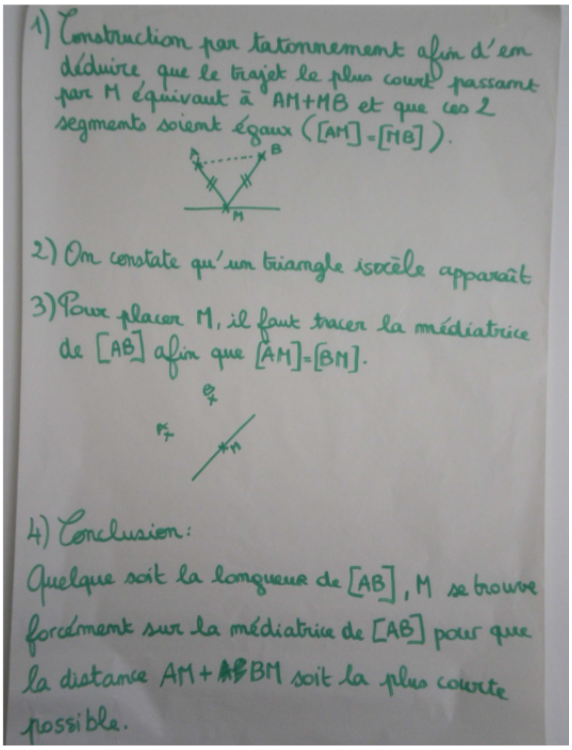
3.3 En formation de professeur des écoles

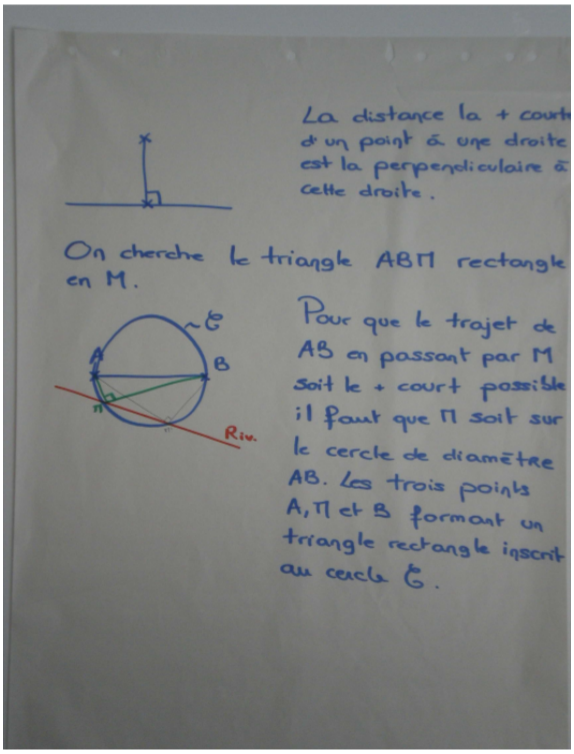


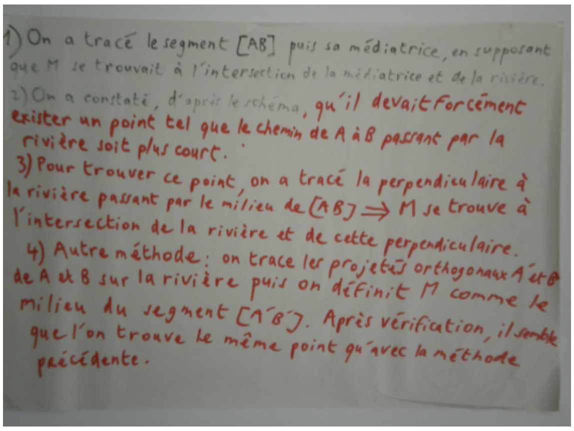



① On a cherché le trajet le plus court, soit AM + MB.
② On a fait différents dessins en déplaçant M sur la droite (d) (= la rivière).
③ On a constaté que lorsque M correspondait à l'intersection de (d) avec la droite passant par le milieu de [AB] et perpendiculaire à (d), AM + MB était le trajet le plus court.
A
B
M
(d)


A
B
Rivière
A'
M
B'
* Le trajet le plus court d'un point à la Rivière est la perpendiculaire à la Rivière passant par ce point.
↳ On trouve 2 points A' et B'
* On trace ensuite la médiatrice du segment [A'B'] qui le coupe en M.
Méthode : Par essais de méthodes successives sans avoir trouvé de contre-exemples.


1) Construction par tatonnement afin d'en déduire que le trajet le plus court passant par M équivaut à AM+MB et que ces 2 segments soient égaux ([AM]=[MB]).
B
M
2) On constate qu'un triangle isocèle apparaît
3) Pour placer M, il faut tracer la médiatrice de [AB] afin que [AM]=[BM].
4) Conclusion:
Quelque soit la longueur de [AB], M se trouve forcément sur la médiatrice de [AB] pour que la distance AM+~~AB~~BM soit la plus courte possible.


La distance la + courte d'un point à une droite est la perpendiculaire à cette droite.
On cherche le triangle ABM rectangle en M.
C
A
B
M
Riv.
Pour que le trajet de AB en passant par M soit le + court possible il faut que M soit sur le cercle de diamètre AB. Les trois points A, M et B formant un triangle rectangle inscrit au cercle C.


1) On a tracé le segment [AB] puis sa médiatrice, en supposant que M se trouvait à l'intersection de la médiatrice et de la rivière.
2) On a constaté, d'après le schéma, qu'il devait forcément exister un point tel que le chemin de A à B passant par la rivière soit plus court.
3) Pour trouver ce point, on a tracé la perpendiculaire à la rivière passant par le milieu de [AB] ⟹ M se trouve à l'intersection de la rivière et de cette perpendiculaire.
4) Autre méthode : on trace les projetés orthogonaux A' et B' de A et B sur la rivière puis on définit M comme le milieu du segment [A'B']. Après vérification, il semble que l'on trouve le même point qu'avec la méthode précédente.

4 Comptes rendus (de l'enseignant)

4.1 En cinquième

4.2 En première S

4.3 En formation de professeur des écoles

Les étudiants sont au nombre de 30. Ils préparent le CRPE.
Seulement deux d'entre eux ont fait une terminale scientifique ; il s'agit donc d'une section à dominante littéraire, dont les dernières connaissances mathématiques sont lointaines, et dont les dernières connaissances en géométrie datent de la classe de seconde.
La séance dure 1h 30.
La présentation du problème et la recherche individuelle : 10 minutes
La recherche en sept groupes de 4 ou 5 étudiants : 50 minutes (dont la rédaction de l'affiche) dans deux salles proches
La mise en commun : 20 minutes
La relance de la recherche par le professeur : 10 minutes

L'énoncé est écrit au tableau par le professeur.
Il s'agit de l'énoncé : « trouver M pour que le trajet de A à B en passant par la rivière soit le plus petit possible ».
Le dessin est celui de la rubrique « situation mathématique » (la rivière est dessinée non horizontale)
Les objectifs de cette séance sont les suivants :
Présenter ce qu'est un problème de recherche en en faisant chercher un aux étudiants, plutôt que de faire un cours magistral à ce propos.
Récupérer des éléments pour la séance suivante (qui dégage les caractéristiques d'un problème de recherche, les objectifs didactiques poursuivis, la gestion de la classe, les obstacles à la mise en œuvre, les points positifs, etc.)
Effectuer une évaluation diagnostique sur les connaissances de géométrie pouvant être mobilisées.
Si des étudiants utilisent une fonction : récupérer leur recherche pour introduire le module « fonction, proportionnalité »
Bilan de cette séance de recherche :
Les étudiants ont bien cherché, se sont pris au jeu.
Plusieurs connaissances de géométrie ont été mobilisées : milieu, médiatrice, projeté orthogonal d'un point sur une droite, plus court chemin d'un point à une droite, construction d'un triangle rectangle connaissant son hypoténuse.
La rédaction des affiches a été longue : les étudiants tenaient à utiliser un vocabulaire mathématique précis, se demandaient quelles notations utiliser.
En une heure de recherche, personne n'avait trouvé « la » solution.
Toutes les constructions proposées étaient fausses.
J'ai été assez déroutée par ce fait. C'est la première fois que ceci m'arrivait.
J'ai donc ajouté au scénario prévu une phase de relance de la recherche : je leur ai donné une position de A et B qu'aucun n'avait prise : A loin de la rivière, et B assez près. Cela a permis de vérifier que leur solution ne

convenait pas, que leur point M ne réalisait pas le maximum.
Ensuite, je leur ai donné une indication : « changeons de problèmee : à la place de la rivière, mettons un miroir. De la maison A, on braque une torche électrique vers le miroir de façon à ce que la lumière éclaire la maison B ».Je leur explique que la lumière, elle, parcourt le plus court chemin (loi de la physique).
Deux étudiants semblent se rappeler cette loi. Je leur demande d'étudier ce nouveau problème pour la semaine suivante, de façon à trouver une méthode de résolution.
La semaine suivante, une étudiante (seulement) a trouvé : elle a utilisé l'égalité des angles d'incidence et de réflexion puis la trigonométrie ; elle trouve l'expression de A'M en fonction de a, b et c.
Lors du bilan, la semaine suivante, j'expose un corrigé de ce problème en adaptant sa méthode : je remplace l'outil « trigonométrie » (car il n'est pas au programme de la préparation au CRPE) par le théorème de Thalès, puis je leur montre l'équivalence entre cette méthode et la méthode utilisant la symétrie axiale.
Prolongement :

Lors d'une séance consacrée à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, nous avons repris ce problème, de façon à montrer aux étudiants la richesse des expérimentations possibles, contrairement à celles effectuées avec papier-crayon. J'avais en effet constaté que leurs essais par mesures portaient sur des positions de A et de B proches des positions « marquées sur l'énoncé », et donc souvent ne parvenaient pas à infirmer la conjecture erronée (bien que 4 étudiants par groupe faisant 3 ou 4 dessins chacun, donne, leur semble-t-il, un « grand nombre » d'expérimentations).
Si c'était à refaire, je changerais donc l'environnement de recherche : le matériel proposé serait : papier, crayon, instruments de géométrie et aussi possibilité d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique. Il pourrait ainsi apparaître des expérimentations (ou investigations) plus nombreuses et surtout plus variées, avec une récolte de mesures plus nombreuses, et donc la possibilité de modéliser par une fonction, dont on étudie le minimum.

Savoirs mathématiques mobilisés dans cette séance :

- le plus court chemin d'un point à une droite
- médiatrice d'un segment (comme perpendiculaire à ce segment en son milieu)
- triangle isocèle
- triangle rectangle
- construction d'un triangle rectangle connaissant le segment qui est son hypoténuse de façon expérimentale en utilisant l'équerre et en la faisant pivoter de façon à ce que les côtés de l'angle droit passent par les extrémités de ce segment
- construction d'un triangle rectangle connaissant le segment qui est son hypoténuse en utilisant le théorème « tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'hypoténuse de ce triangle »
- utiliser le vocabulaire mathématique
- utiliser les notations géométriques : droite, segment, longueur

Savoirs méthodologiques mobilisés :

- reformuler l'énoncé, en le mettant sous la forme « on cherche M sur la droite (d), et tel que $AM + MB$ soit le plus petit possible ».
- faire des essais en faisant plusieurs dessins (défaut : ces dessins sont trop proches pour infirmer une conjecture erronée)
- rédaction d'un texte descriptif et explicatif utilisant le vocabulaire et les notations mathématiques (pas de texte argumentatif ou de démonstration mathématique)

Il a donc été possible d'utiliser les affiches produites pour introduire le module de géométrie qui suivait la recherche de ce problème car, bien qu'aucun groupe n'ait trouvé « la bonne solution », beaucoup de savoirs et savoir-faire ont pu être dégagés.