Le champs de colonnes

Equipe DREAM

19 août 2021

Table des matières

1 Le problème mathématique **2**
1.1 L'énoncé 2
1.2 Une approche analytique 2
1.3 Une approche géométrique, par les vecteurs 3
1.4 Une approche géométrique, par les angles 6

2 Objets potentiellement travaillés / Connaissances en jeu **6**

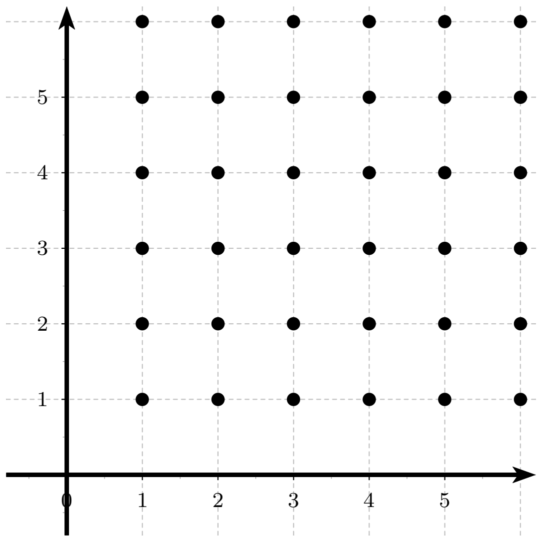
3 Compte rendu n° 1 de mise en œuvre en classe de 2nde **6**
3.1 Énoncé et consignes 6
3.2 Scénario 6
3.3 Productions d'élèves et bilans de recherche associés 7

4 Compte rendu n° 2 de mise en œuvre en classe de 2nde **10**
4.1 Énoncé et consignes 10
4.2 Scénario 10
4.3 Production d'élèves et bilan de la recherche 11

1 Le problème mathématique

1.1 L'énoncé

On se place aux bords d'un champ constitué d'une infinité de colonnes verticales, identiques, qui sont repérées par des points sur la grille ci-dessous :



Les colonnes ont toutes des coordonnées entières strictement positives et on se place sur les bords correspondant aux demi-droites des axes des abscisses et des ordonnées. Depuis ce bord on pointe un laser à travers ce champ de colonnes.

Trouver toutes les trajectoires où le laser ne rencontre aucune colonne. Comment les caractériser ? Comment le prouver ?

1.2 Une approche analytique

Dans toute la preuve, on parlera d'équation de droites mais on ne considérera au final que la demi-droite extraite du quart de plan positif $(x, y \geq 0)$.

Cas des demi-droites parallèles à l'axe des ordonnées Les seules demi-droites parallèles à l'axe des ordonnées sont celles d'équation $x = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

Cas des demi-droites non parallèles à l'axe des ordonnées Dans ce paragraphe, on considérera les équations réduites des (demi-)droites et on étudiera les équations de la forme $y = ax + b$ avec une attention particulière sur la nature des coefficients a et b.

$a = 0$ **:** la droite d'équation $y = b$ ne contient aucun point à coordonnées entières strictement positives si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

$b = 0$ **:** la demi-droite d'équation $y = ax$ ne contient aucun point à coordonnées entières strictement positives si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$.

> Soient m, n deux entiers strictement positifs. Le point $M(n, m)$ appartient à la demi-droite si et seulement si $m = an$ si et seulement si, $a = \frac{m}{n}$.

$b \in \mathbb{N}$ **:** Le cas se traite de manière équivalente au cas précédent et permet de conclure que la droite d'équation $y = ax + b$ ne contient aucun point à coordonnées entières strictement positives si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$.

$a, b \in \mathbb{Q}^*$: On pose $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ où p et q (resp. p' et q') sont premiers entre eux. Dans ce cas :

$$y = ax + b \Leftrightarrow (qq')y = (pq')x + p'q$$

cette dernière étant une équation diophantienne. Cette équation admet des solutions si et seulement si PGCD(qq', pq') divise $p'q$. Or PGCD$(qq', pq') = q'$PGCD$(q, p) = q'$ donc l'équation admet des solutions si et seulement si q' divise $p'q$. **Attention, dans ce cas, les solutions à coordonnées entières ne sont pas forcément dans le quart de plan positif ! Ce point est détaillé dans la section suivante avec l'approche par les vecteurs**.

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$: la demi-droite d'équation $y = ax + b$ ne contient aucun point à coordonnées entières strictement positives.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $M(n, m)$ (avec m, n deux entiers strictement positifs) appartenant à la demi-droite. Dans ce cas, $m = an + b$ ce qui équivaut à $a = \frac{m-b}{n} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible.

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: La droite d'équation $y = ax+b$ ne contient aucun point à coordonnées entières si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $an + b \notin \mathbb{N}^*$. En effet,

$$\begin{aligned} \exists (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, M(n, m) \in \{(x, y), y = ax + b\} &\Leftrightarrow \exists (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, m = an + b \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, an + b \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

La difficulté peut résider, au cas par cas, dans la vérification de la dernière. Deux exemples pour illustrer ce dernier cas :

Exemple n° 1 : On considère la demi-droite d'équation $y = \pi x + (3 - \pi)$. Les deux coefficients sont irrationnels. L'équation peut s'écrire $y = \pi(x - 1) + 3$ et le point $(1; 3)$ appartient bien à la droite. On vérifie également que

$$\pi \times 1 + (3 - \pi) = 3 \in \mathbb{N}^*$$

Exemple n° 2 : On considère la demi-droite d'équation $y = \pi x + \sqrt{2}$. Les deux coefficients sont irrationnels. S'il existe un point à coordonnées entières strictement positives appartenant à cette (demi)-droite, cela signifierait qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $m = \pi n + \sqrt{2}$ est un entier. Dans ce cas, $m - \pi n = \sqrt{2}$ et donc $m^2 - 2\pi nm + \pi^2 n^2 = 2$. Le nombre π est donc racine du polynome $P = n^2 X^2 - 2nmX + m^2 - 2$ ce qui est impossible car π est transcendant. En conclusion, la droite d'équation $y = \pi x + \sqrt{2}$ ne contient aucun point à coordonnées entières strictement positives

□

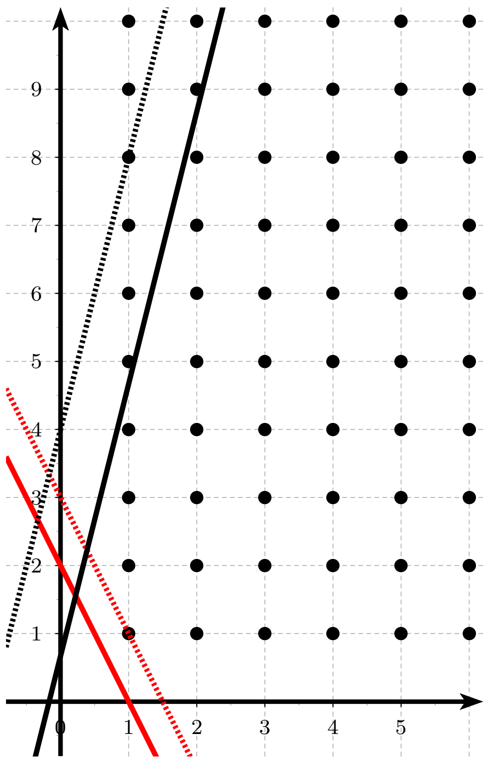
1.3 Une approche géométrique, par les vecteurs

Dans les programmes du lycée, les droites sont étroitement liées aux vecteurs. Une approche naturelle pour les élèves pourrait être de considérer un vecteur directeur et d'étudier les conditions sur le point d'origine de la demi-droite (sur les demi-axes positifs) pour que la trajectoire obtenue traverse le champ de colonnes.

Nous traiterons cette approche en partant de cas particuliers pour élargir à des cas plus généraux. Le cas des droites verticales et horizontales étant trivial, il ne sera pas détaillé ici.

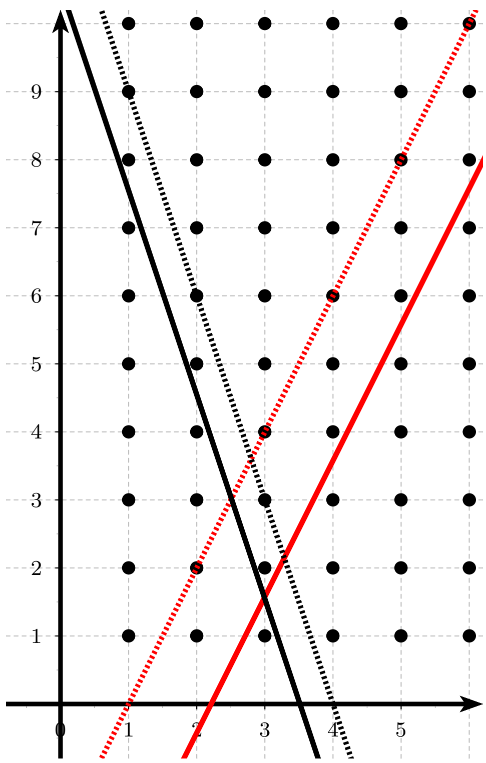
Droites de vecteur directeur $\vec{v}(1;b)$ où $b \in \mathbb{Z}^*$ et passant par B

Si $B(0,c)$ où $c \geq 0$:



Dans ce cas, il faut et il suffit que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{n \in \mathbb{N}, n \geq -b+1,\}$ si $b < 0$ et que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ si $b > 0$.

Si $B(c,0)$ où $c \geq 0$:



Dans ce cas, il faut et il suffit que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{n}{-b}, \in \mathbb{N}, n \geq -b+1,\}$ si $b < 0$ et que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{n}{b}, n \in \mathbb{N}\}$ si $b > 0$.

Droites de vecteur directeur $\vec{v}(a;1)$ où $a \in \mathbb{Z}^*$ et passant par B Ce cas se traite de manière symétrique par rapport au cas précédent.

Si $B(0,c)$ où $c \geq 0$: Dans ce cas, il faut et il suffit que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{n}{-a}, n \in \mathbb{N}, n \geq -a+1,\}$ si $a < 0$ et que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}\}$ si $a > 0$.

Si $B(c,0)$ où $c \geq 0$: Dans ce cas, il faut et il suffit que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{n \in \mathbb{N}, n \geq -a+1,\}$ si $a < 0$ et que $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ si $a > 0$.

Droites de vecteur directeur $\vec{v}(a;b)$ où $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ et passant par B

Si $B(0,c)$ où $c \geq 0$: Dans ce cas, la droite a pour équation $bx - ay + ac = 0$.

- Si le point $M(x;y)$, à coordonnées entières, appartient à la droite alors $ac \in \mathbb{N}$. Une condition nécessaire au fait que la droite passe par des points à coordonnées entières (strictement positives) est que $c \in \{\frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si $c \in \{\frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}\}$, alors $ac \in \mathbb{N}$ et l'équation $ay - bx = ac$ est une équation diophantienne qui admet des solutions entières ($\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ divise ac).
  — Si $b > 0$, la droite aura un coefficient directeur strictement positif et contiendra des points à coordonnées entières strictement positives. La condition sur c est donc suffisante.
  — Si $b < 0$, la droite aura un coefficient directeur strictement négatif et il n'est pas garanti qu'elle contienne des points à coordonnées entières strictement positives. Ce sera le cas uniquement si $c \in \{\lfloor \frac{-b}{a} \rfloor + 1 + \frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{\ldots^{**}\}\}$.

  ** : sauf quelques entiers (car les solutions entières ne se trouvent pas toutes dans le quart de plan strictement positif). À partir d'un certain rang, (dès que $c \geq -b$), il n'y a plus de restriction sur n.

En conclusion, si $b > 0$, la droite ne passe par **aucun point à coordonnées entières strictement positives** si et seulement si $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}\}$. Si $b < 0$, la droite ne passe par **aucun point à coordonnées entières strictement positives** si et seulement si $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\lfloor \frac{-b}{a} \rfloor + 1 + \frac{n}{a}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{\ldots^{**}\}\}$.

Si $B(c,0)$ où $c \geq 0$: Ce cas se traite de manière similaire, avec permutation des rôles entre a et b.

Autres cas

$\vec{v}(a;b)$ où $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$: il suffit de se ramener au cas où les coordonnées du vecteur sont premières entre elles (en divisant chaque coordonnée du vecteur par leur PGCD). Les deux vecteurs considérés sont bien colinéaires et donc dirigent la même droite.

$\vec{v}(a;b)$ où $a, b \in \mathbb{Q}^*$: il suffit de se ramener au cas où les coordonnées du vecteur sont entières (en multipliant chaque coordonnée du vecteur par le PPCM des deux dénominateurs - après avoir écrit les fractions sous leur forme irréductible)

$\vec{v}(a;b)$ où $a \in \mathbb{Q}^*$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, passant par $B(c,0)$: L'équation de la droite est $bx - ay + ac = 0$. Si $c \in \mathbb{Q}_+$, l'équation n'admet aucune solution à coordonnées entières. Si $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+$, alors l'équation peut admettre des solutions à coordonnées entières strictement positives (voir exemple n° 1 du paragraphe n° 1.2).

$\vec{v}(a;b)$ où $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Si $\vec{v}$ est colinéaire à un vecteur à coordonnées entières (ou rationnelles), on peut répondre à la question. Sinon, ...

1.4 Une approche géométrique, par les angles

On peut reprendre l'étude menée au paragraphe précédent en caractérisant les demi-droites par leur origine sur les demi-axes et l'angle (positif ?) qu'elle forme avec le bord (l'axe des abscisses ou des ordonnées suivant l'emplacement de l'origine de la demi-droite).

2 Objets potentiellement travaillés / Connaissances en jeu

Les notions mathématiques mobilisées

- Caractérisation d'une droite (point de vue géométrique, vectoriel ou affine)
- Equations de droite (générale ou réduite)
- Vecteur directeur, vecteurs colinéaires
- Appartenance d'un point à une droite (par équation, par colinéarité...)
- Ensembles de nombres
- Propriété des rationnels
- PGCD, PPCM de deux entiers
- Equations diophantiennes

Les raisonnements utilisées

- Disjonction de cas
- Raisonnement par l'absurde
- Raisonnement par condition nécessaire et suffisante (analyse-synthèse)

3 Compte rendu n° 1 de mise en œuvre en classe de 2nde

Situation mise en œuvre dans une classe de seconde, au lycée Ferney-Voltaire (01), par Coralie Escot.

3.1 Énoncé et consignes

Le travail de recherche peut être effectué à la fois en distanciel ou en classe. Dans les deux cas, la vidéo suivante est visualisée par les élèves :

https://drive.google.com/file/d/1g7jpcgM7ftsV0azWdniU1oJ-eXMCpN3s/view?usp=sharing

Les élèves ont à disposition des grilles représentant le champ de colonnes, afin de pouvoir dessiner, tracer des trajectoires de lasers.

3.2 Scénario

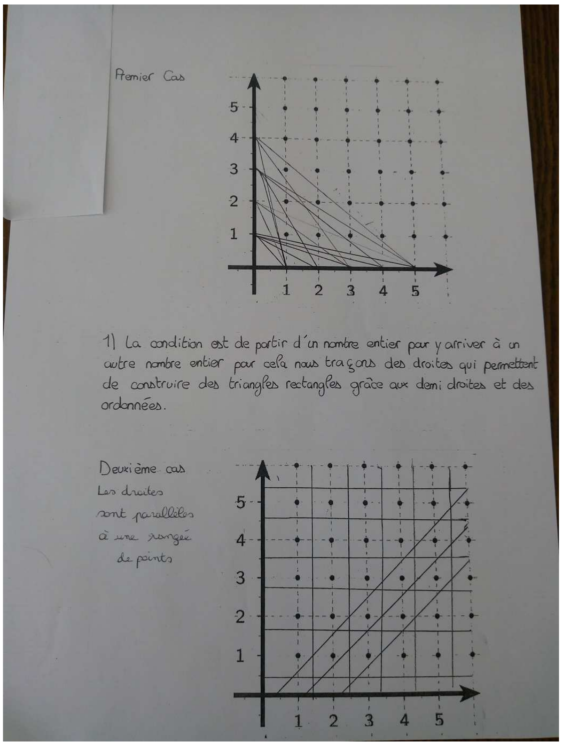
Pour les élèves en présentiel, le temps de recherche s'organise de manière classique avec une phase de recherche individuelle puis une phase de recherche en groupe. A l'issue du travail en groupe, ils réalisent un bilan - par groupe - de leurs résultats.

Chaque groupe reçoit ensuite les bilans écrits par d'autres élèves afin de les analyser : points forts, points faibles, différences, similarités.

Une synthèse finale de la recherche est distribué aux élèves.

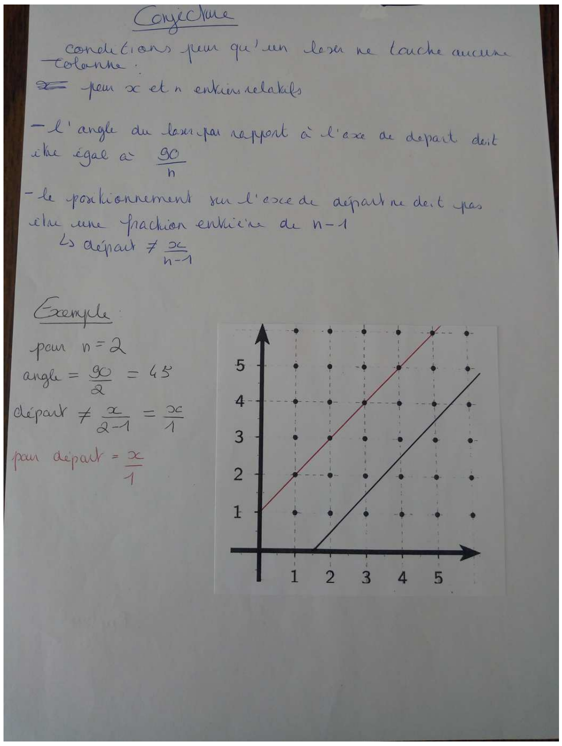
3.3 Productions d'élèves et bilans de recherche associés

Voici le travail réalisé par les élèves d'un groupe de 4 élèves, en classe, et le bilan qu'ils en ont fait.


Premier Cas

1) La condition est de partir d'un nombre entier pour y arriver à un autre nombre entier par cela nous traçons des droites qui permettent de construire des triangles rectangles grâce aux demi droites et des ordonnées.

Deuxième cas
Les droites sont parallèles à une rangée de points

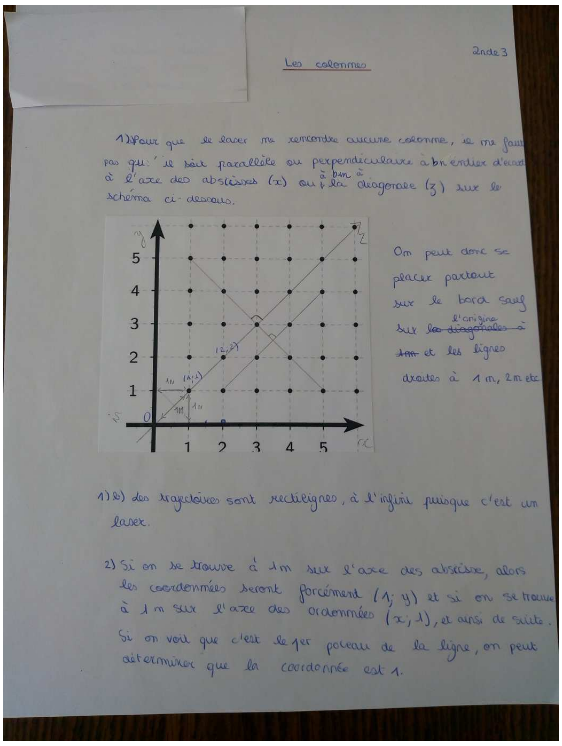

Conjecture

conditions pour qu'un laser ne touche aucune colonne :
pour x et n entiers relatifs

– l'angle du laser par rapport à l'axe de départ doit être égal à $\frac{90}{n}$

– le positionnement sur l'axe de départ ne doit pas être une fraction entière de n – 1
↳ départ $\neq \frac{x}{n-1}$

Exemple
pour n = 2
angle = $\frac{90}{2}$ = 45
départ $\neq \frac{x}{2-1} = \frac{x}{1}$
pour départ = $\frac{x}{1}$


2nde 3

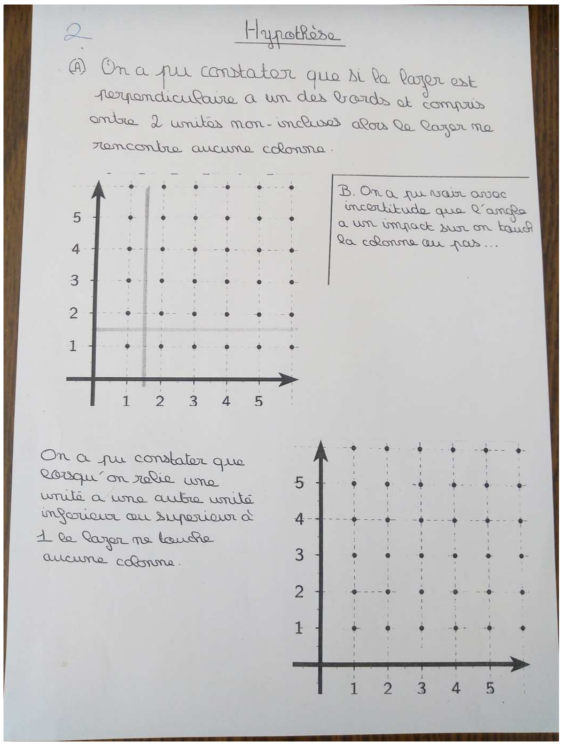
Les colonnes

1) Pour que le laser ne rencontre aucune colonne, il ne faut pas qu'il soit parallèle ou perpendiculaire à un entier d'écart à l'axe des abscisses (x) ou à bm à la diagonale (z) sur le schéma ci-dessous.

Om peut donc se placer partout sur le bord sauf sur ~~les diagonales~~ l'origine à ~~1m~~ et les lignes droites à 1 m, 2m etc

1) b) Les trajectoires sont rectilignes, à l'infini puisque c'est un laser.

2) Si on se trouve à 1m sur l'axe des abscisse, alors les coordonnées seront forcément (1; y) et si on se trouve à 1 m sur l'axe des ordonnées (x; 1), et ainsi de suite. Si on voit que c'est le 1er poteau de la ligne, on peut déterminer que la coordonnée est 1.


2

Hypothèse

(A) On a pu constater que si le lazer est perpendiculaire a un des bords et compris entre 2 unités non-incluses alors le lazer ne rencontre aucune colonne.

B. On a pu voir avec incertitude que l'angle a un impact sur on touche la colonne ou pas...

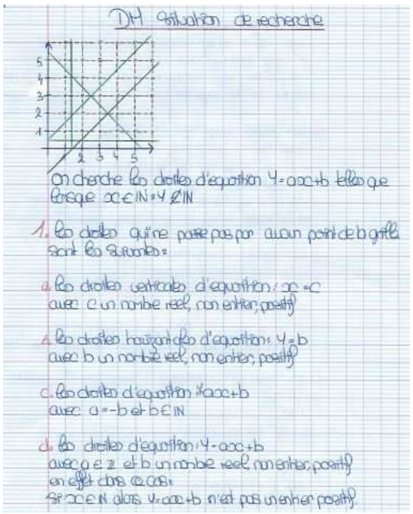
On a pu constater que lorsqu'on relie une unité a une autre unité inferieur ou superieur à 1 le lazer ne touche aucune colonne.

Bilan de recherche : champ de colonnes

CONJECTURES : Les trajectoires suivantes traversent le site archéologique sans jamais rencontrer une colonne :

1. Les trajectoires **parallèles à l'axe des ordonnées** dont le point de départ a une abscisse qui n'est pas un nombre entier ;
2. Les trajectoires **parallèles à l'axe des abscisses** dont le point de départ a une ordonnée qui n'est pas un nombre entier ;
3. Les trajectoires **parallèles ou perpendiculaires à la diagonale** du quadrillage dont le point de départ a une abscisse ou une ordonnée qui n'est pas un nombre entier ;
4. Les trajectoires **passant par** $(n; 0)$ et $(0; m)$ où $m, n \in \mathbb{N}^*$ (m et n distincts) ;
   Cas particulier : les trajectoires passant à la fois par le point $(n; 0)$ et par le point $(0; n+1)$ ou par le point $(n+1; 0)$ et par le point $(0; n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Les trajectoires **faisant un angle** de $\frac{90}{n+1}$ par rapport à l'axe de départ, et dont le point de départ a une abscisse ou une ordonnée différente de $\frac{x}{n}$, où $x, n \in \mathbb{N}*$

Voici le travail réalisé par 4 élèves, **en devoir à la maison** , et le bilan qu'ils en ont fait.


DM situation de recherche

On cherche les droites d'équation y=ax+b telles que lorsque x∈IN : y∉IN

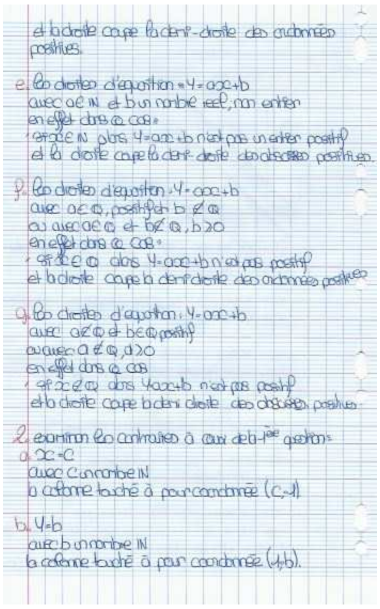
1. les droites qui ne passe pas par aucun point de la grille sont les suivantes :

a. les droites verticales d'équation : x=c
avec c un nombre reel, non entier, positif

b. les droites horizontales d'équation : y=b
avec b un nombre reel, non entier, positif

c. les droites d'équation y=ax+b
avec a=-b et b∈IN

d. les droites d'équation : y=ax+b
avec a ∈ Z et b un nombre reel non entier, positif
en effet dans ce cas :
si x∈IN alors y=ax+b n'est pas un entier positif


et la droite coupe la demi-droite des ordonnées positives.

e. les droites d'équation : y=ax+b
avec a∈IN et b un nombre reel, non entier
en effet dans ce cas :
si x∈IN alors y=ax+b n'est pas un entier positif
et la droite coupe la demi-droite des abscisses positives.

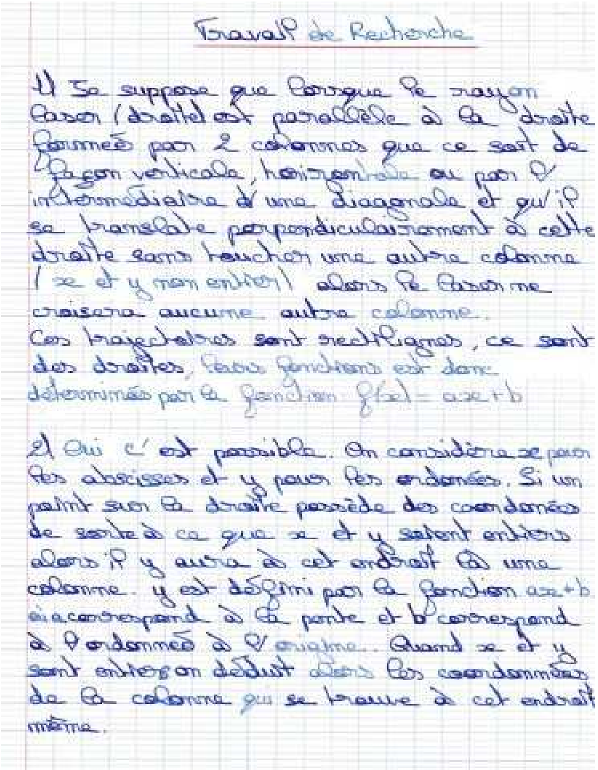
f. les droites d'équation : y=ax+b
avec a∈Q, positif et b∉Q
ou avec a∈Q et b∉Q, b≥0
en effet dans ce cas :
si x∈Q alors y=ax+b n'est pas positif
et la droite coupe la demi-droite des ordonnées positives

g. les droites d'équation : y=ax+b
avec a∉Q et b∈Q positif
ou avec a∉Q, a≥0
en effet dans ce cas
si x∉Q alors y=ax+b n'est pas positif
et la droite coupe la demi droite des abscisses positives

2. examinons les contraires à ceux de la 1ère question :
a. x=c
avec c un nombre IN
la colonne touché à pour coordonnée (c;1)

b. y=b
avec b un nombre IN
la colonne touché à pour coordonnée (1;b).

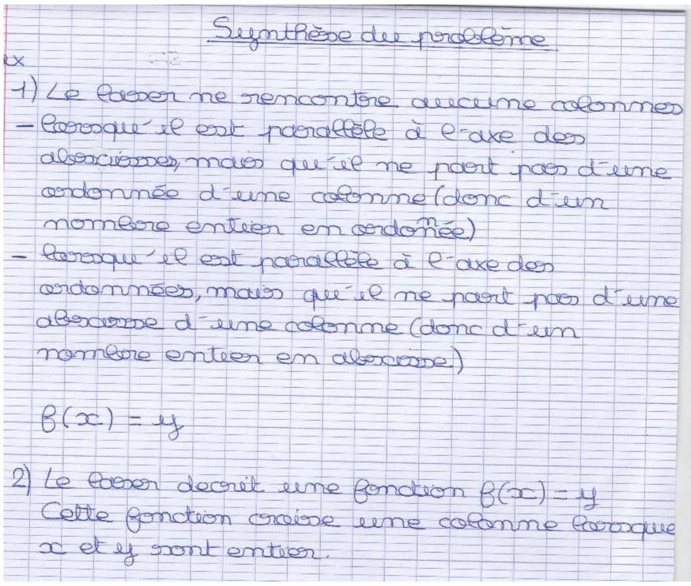

c. y=ax+b
avec a∈Z et b entier positif et a≠-b



Travail de Recherche

1) Je suppose que lorsque le rayon laser (droite) est parallèle à la droite formée par 2 colonnes que ce soit de façon verticale, horizontale ou par l'intermédiaire d'une diagonale et qu'il se translate perpendiculairement à cette droite sans toucher une autre colonne (x et y non entier) alors le laser ne croisera aucune autre colonne.
Ces trajectoires sont rectilignes, ce sont des droites, leurs fonctions est donc déterminées par la fonction $f(x) = ax+b$

2) Oui c'est possible. On considère x pour les abscisses et y pour les ordonnées. Si un point sur la droite possède des coordonnées de sorte à ce que x et y soient entiers alors il y aura à cet endroit là une colonne. y est défini par la fonction $ax+b$ où a correspond à la pente et b correspond à l'ordonnée à l'origine. Quand x et y sont entiers on déduit alors les coordonnées de la colonne qui se trouve à cet endroit même.



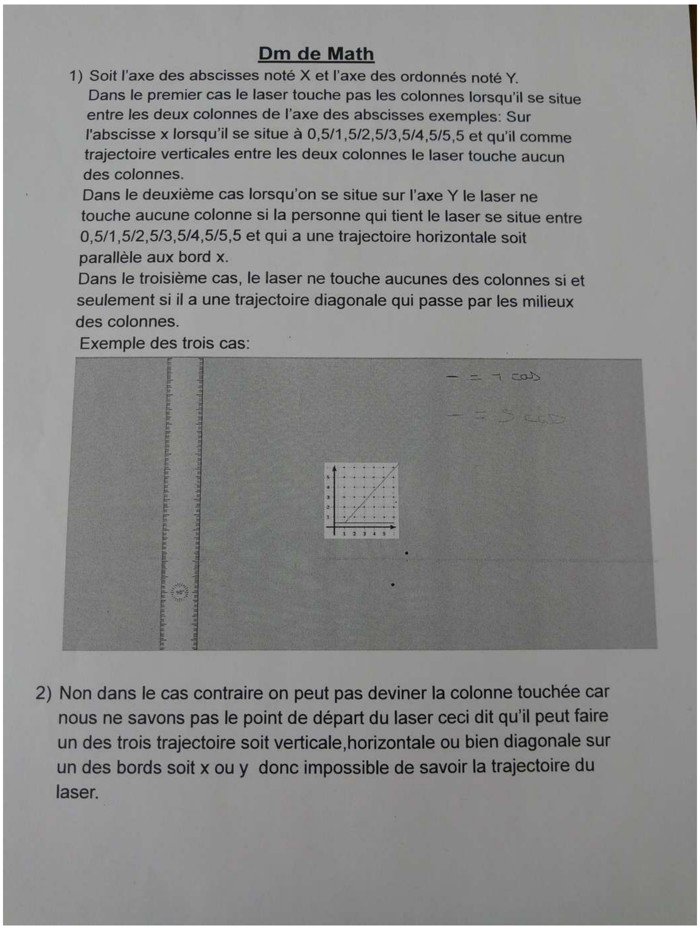
Synthèse du problème

ex

1) Le laser ne rencontre aucune colonnes
- lorsqu'il est parallèle à l'axe des abscisses, mais qu'il ne part pas d'une ordonnée d'une colonne (donc d'un nombre entier en ordonnée)
- lorsqu'il est parallèle à l'axe des ordonnées, mais qu'il ne part pas d'une abscisse d'une colonne (donc d'un nombre entier en abscisse)

$f(x) = y$

2) Le laser décrit une fonction $f(x) = y$
Cette fonction croise une colonne lorsque x et y sont entier.



Dm de Math

1) Soit l'axe des abscisses noté X et l'axe des ordonnés noté Y.
Dans le premier cas le laser touche pas les colonnes lorsqu'il se situe entre les deux colonnes de l'axe des abscisses exemples: Sur l'abscisse x lorsqu'il se situe à 0,5/1,5/2,5/3,5/4,5/5,5 et qu'il comme trajectoire verticales entre les deux colonnes le laser touche aucun des colonnes.
Dans le deuxième cas lorsqu'on se situe sur l'axe Y le laser ne touche aucune colonne si la personne qui tient le laser se situe entre 0,5/1,5/2,5/3,5/4,5/5,5 et qui a une trajectoire horizontale soit parallèle aux bord x.
Dans le troisième cas, le laser ne touche aucunes des colonnes si et seulement si il a une trajectoire diagonale qui passe par les milieux des colonnes.
Exemple des trois cas:

2) Non dans le cas contraire on peut pas deviner la colonne touchée car nous ne savons pas le point de départ du laser ceci dit qu'il peut faire un des trois trajectoire soit verticale,horizontale ou bien diagonale sur un des bords soit x ou y donc impossible de savoir la trajectoire du laser.

Bilan de recherche : champ de colonnes

CONJECTURES : Les trajectoires suivantes traversent le site archéologique sans jamais rencontrer une colonne :

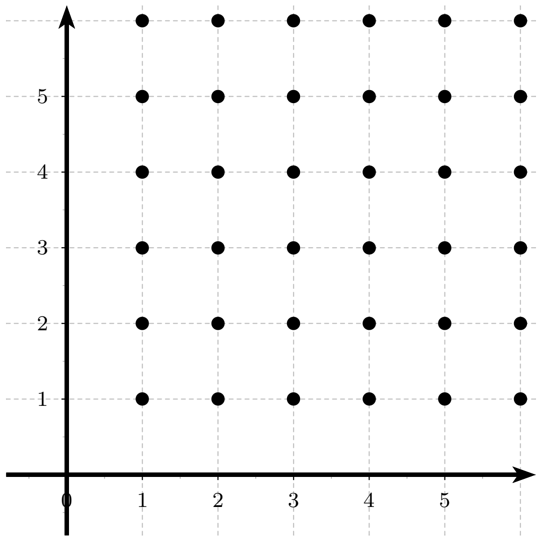
1. Les trajectoires **parallèles à l'axe des ordonnées** dont le point de départ a une abscisse qui n'est pas un nombre entier.
   Cela correspond aux droites d'équation $\boxed{x = c}$ où c est un réel positif non entier.
2. Les trajectoires **parallèles à l'axe des abscisses** dont le point de départ a une ordonnée qui n'est pas un nombre entier ; Cela correspond aux droites d'équation $\boxed{y = b}$ où c est un réel non entier, positif.
3. Les trajectoires **parallèles ou perpendiculaires à la diagonale** du quadrillage dont le point de départ a une abscisse ou une ordonnée qui n'est pas un nombre entier ;

METHODES :
• déterminer l'équation des demi-droites donnée par $y = ax + b$ ou $x = c$
• déterminer les conditions sur a, b, et c pour que la demi-droite ne rencontre aucune colonne

4 Compte rendu n° 2 de mise en œuvre en classe de 2nde

4.1 Énoncé et consignes

On se place aux bords d'un champ constitué d'une infinité de colonnes verticales, identiques, qui sont repérées par des points sur la grille ci-dessous :



Les colonnes ont toutes des coordonnées entières strictement positives et on se place sur les bords correspondant aux demi-droites des axes des abscisses et des ordonnées. Depuis ce bord on pointe un laser à travers ce champ de colonnes.

Trouver toutes les trajectoires où le laser ne rencontre aucune colonne. Comment les caractériser ? Comment le prouver ?

Contexte de l'exercice : Cours en demi-jauge avec seulement 3 heures pour expérimenter cette situation et en faire le bilan.

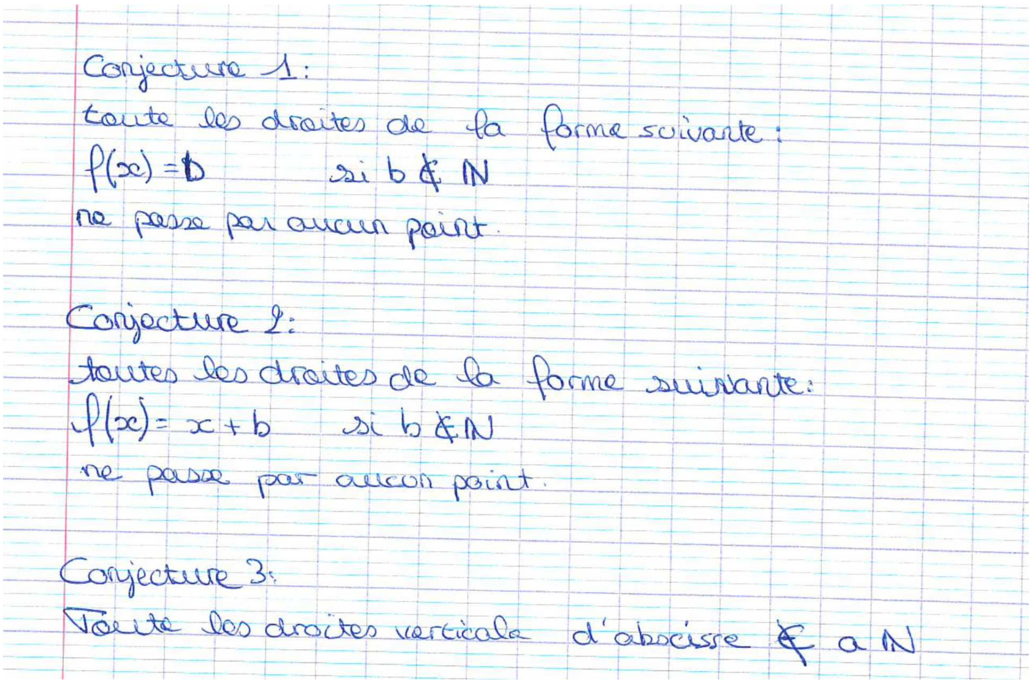
4.2 Scénario

La mise en œuvre est ici adaptée suite aux contraintes de temps et d'organisation (demi-classe). Elle s'organise comme ceci :

- Une séance de 2h avec un groupe en présentiel et l'autre à distance (en classe virtuelle). L'énoncé leur est présenté, un temps de recherche individuel a lieu (5 min) puis un retour sur l'énoncé est fait avec les éventuelles questions. Il s'en suit un temps de recherche par groupe (pour ceux qui sont en présence) et individuel (pour ceux qui sont à distance). Au bout de 10 min de travail, on fait un point pour citer oralement quelques trajectoires « triviales » (dans le sens où les élèves les ont facilement conjecturées). Cela permet de renforcer davantage la compréhension du problème puis de relancer une dynamique de recherche en précisant qu'il y en a beaucoup d'autres (et qui ne sont pas parallèles aux cas triviaux). Au bout des deux heures, chaque groupe a rédigé une petite synthèse écrite avec ses conjectures.
- Une séance d'une heure suit (avec inversion des groupes en présentiel/distanciel) pour mettre en commun les conjectures formulées et les formaliser.

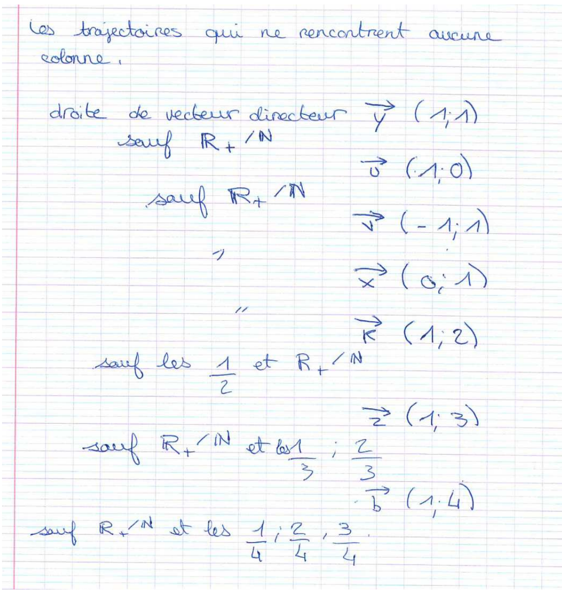
4.3 Production d'élèves et bilan de la recherche

Quelques compte-rendus rédigés par le groupe en présentiel lors de la première séance.


Conjecture 1:
toute les droites de la forme suivante :
$f(x) = b$ si $b \notin \mathbb{N}$
ne passe par aucun point.

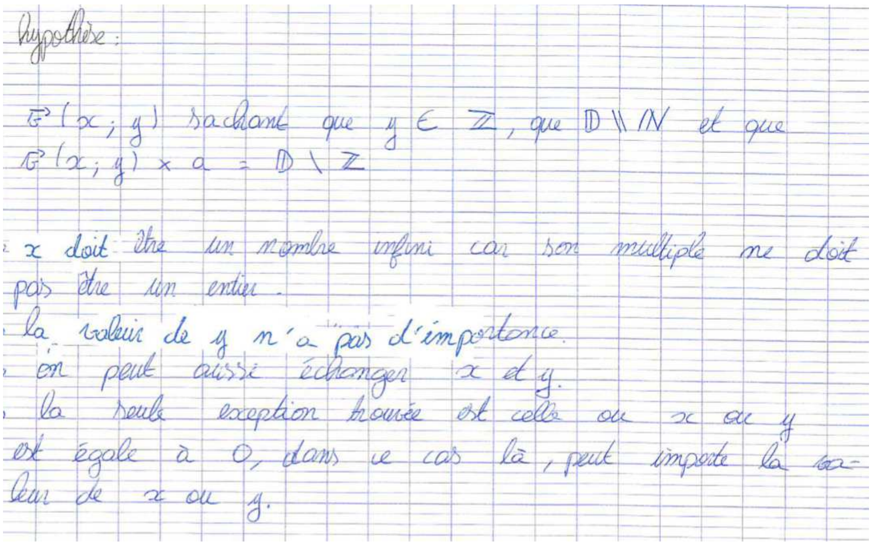
Conjecture 2:
toutes les droites de la forme suivante:
$f(x) = x + b$ si $b \notin \mathbb{N}$
ne passe par aucun point.

Conjecture 3:
Toute les droites verticale d'abscisse $\notin$ a $\mathbb{N}$



Les trajectoires qui ne rencontrent aucune colonne.

droite de vecteur directeur $\vec{y}\ (1;1)$
sauf $\mathbb{R}_+ / \mathbb{N}$
$\vec{u}\ (1;0)$
sauf $\mathbb{R}_+ / \mathbb{N}$
$\vec{v}\ (-1;1)$
"
$\vec{x}\ (0;1)$
"
$\vec{k}\ (1;2)$
sauf les $\frac{1}{2}$ et $\mathbb{R}_+ / \mathbb{N}$
$\vec{z}\ (1;3)$
sauf $\mathbb{R}_+ / \mathbb{N}$ et ~~les~~ $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$
$\vec{b}\ (1;4)$
sauf $\mathbb{R}_+ / \mathbb{N}$ et les $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$.



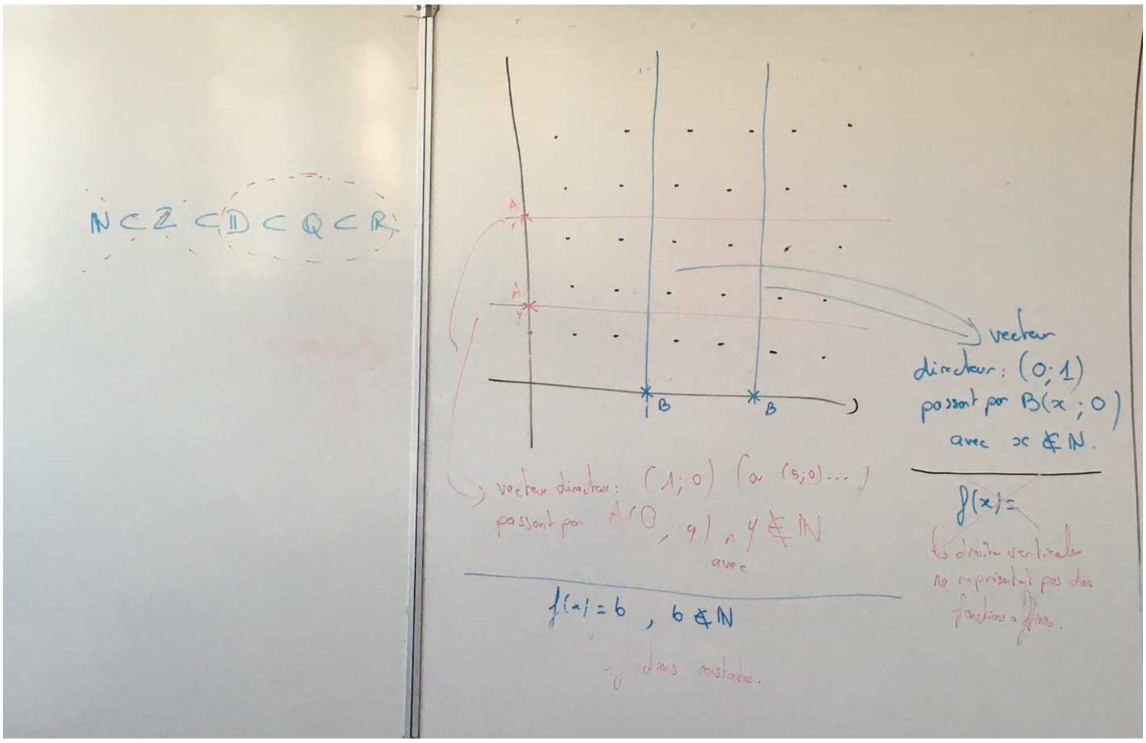
Hypothèse :

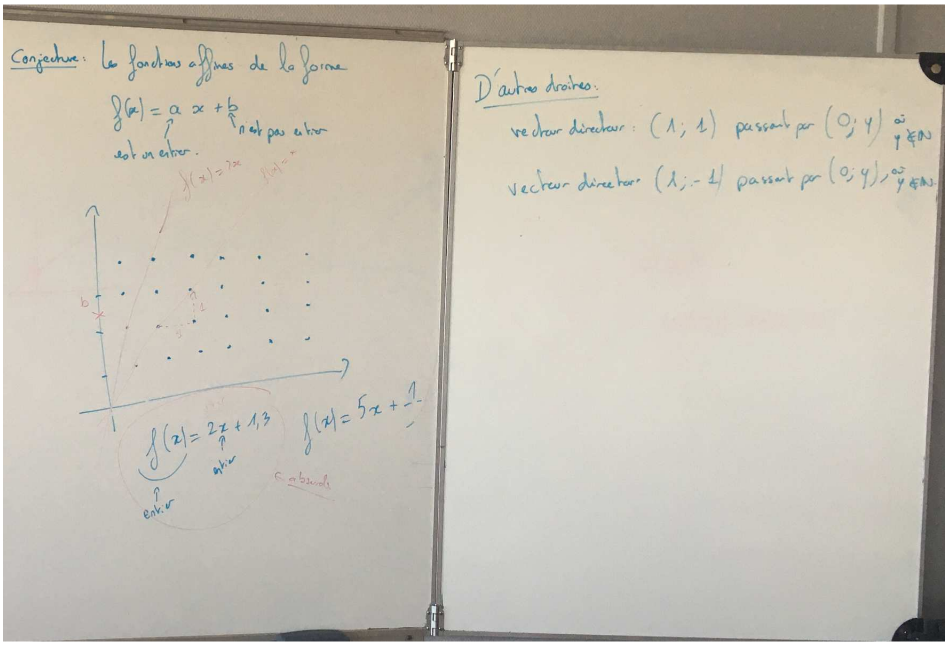
$\vec{v}\,(x;y)$ sachant que $y \in \mathbb{Z}$, que $\mathbb{D} \setminus \mathbb{N}$ et que
$\vec{v}\,(x;y) \times a = \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$

· x doit être un nombre infini car son multiple ne doit pas être un entier.
· la valeur de y n'a pas d'importance.
· on peut aussi échanger x et y.
· la seule exception trouvée est celle où x ou y est égale à 0, dans ce cas là, peut importe la valeur de x ou y.

Pour ce dernier compte-rendu, la conjecture peut-être reformulée (et complétée !) ainsi : *on considère un vecteur directeur $\vec{v}(x;y)$ avec $y \in \mathbb{Z}$ et x irrationnel (pour qu'il ne puisse être multiplié par un nombre entier pour donner un autre nombre entier). Dans ce cas, toute droite ayant pour vecteur directeur $\vec{v}$ ne contient aucun point à coordonnées entières.* On se retrouve dans un des cas énoncé à la fin du paragraphe 1.3 et une droite avec un tel vecteur directeur peut avoir des points à coordonnées entières (ex : $\vec{v}(\sqrt{2};1)$ et $B(0;\frac{5\sqrt{2}-2}{2})$).

Voici un aperçu de la trace écrite du bilan (qui inclut les conjectures des élèves ayant été à distance lors de la séance de recherche) :





L'heure n'a pas suffi pour revenir sur toutes les conjectures des élèves. Certaines (la troisième notamment) n'ont pas été abordées lors du bilan.