Le billard
Analyse mathématique

Équipe DREAM

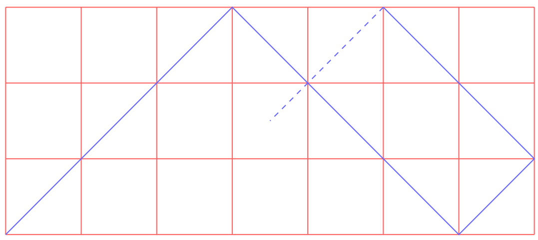
15 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

L'énoncé de la situation :
On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).
Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



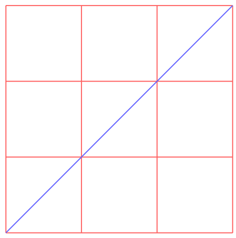
Question Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

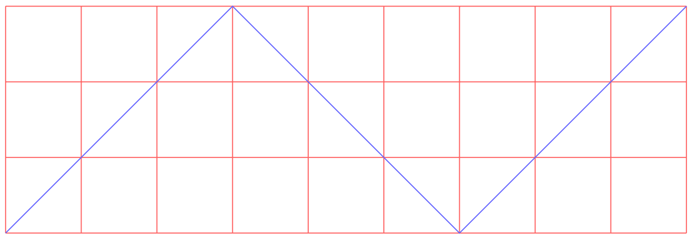
2.1 Première solution

Observons d'abord quelques cas.

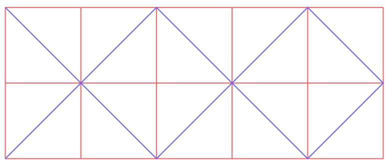
Dimensions (3,3) : Le rayon suit la diagonale d'un carré. 3 carreaux sont traversés.



Dimensions (9,3) : Le rayon suit la diagonale de trois carrés (3,3) successifs. 9 carreaux sont traversés.



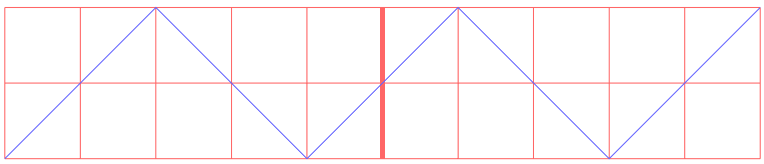
Dimensions (5,2) : Le rayon traverse deux carrés (2,2) , puis rebondit. Les 10 carreaux sont traversés.



Deux conjectures sont rapidement posées :

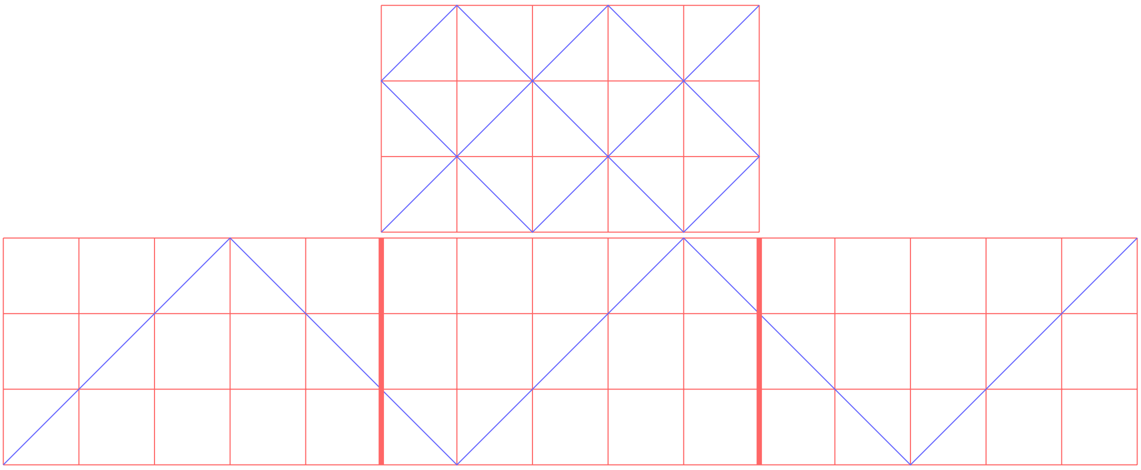
- Si m est multiple de n, le nombre de carreaux traversés est m.
- Si m et n sont premiers entre eux, le nombre de carreaux traversés est mn.

Observons de plus près le troisième cas.
On peut "déplier" la trajectoire, en dessinant sa deuxième partie symétriquement sur un rectangle identique au premier :



Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (2,2)

Dimensions (5,3) :
Pour "déplier" la trajectoire, il faut cette fois ajouter deux rectangles, de faĉ on à ce que la longueur totale soit un multiple de 3.



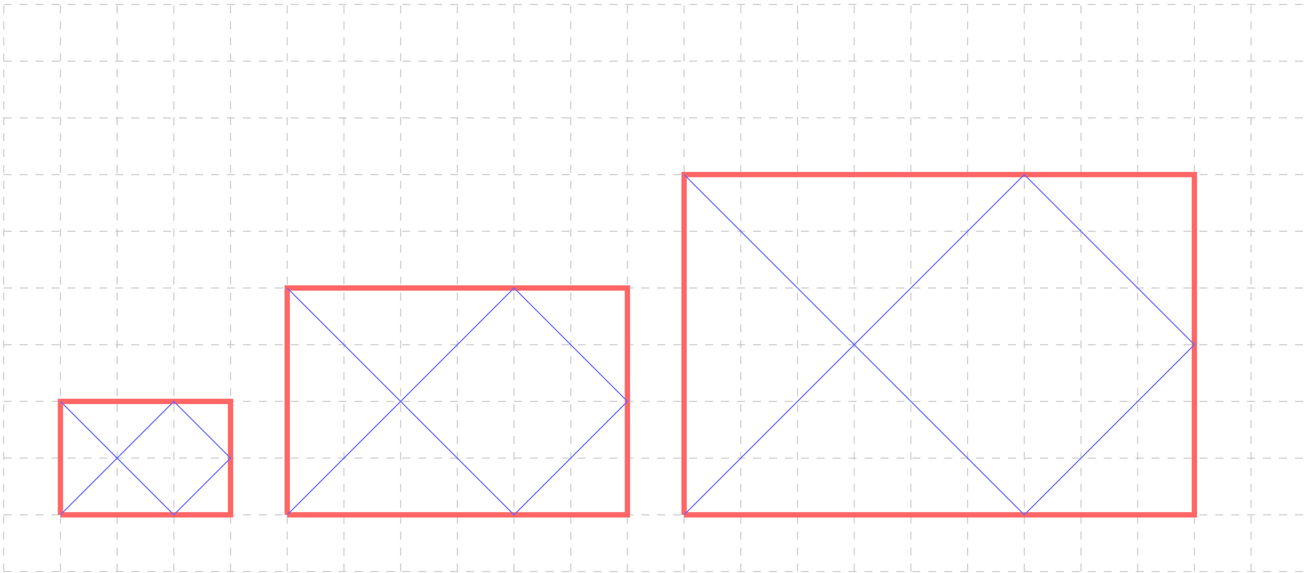
Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (3,3)

Dimensions (4,7) :
Pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (4,4) on a besoin de 7 rectangles, de faĉ on à ce que la longueur totale soit un multiple de 4.

Dimensions (m,n) :
On suppose que m>n.
La longueur du grand rectangle obtenu est un multiple de m. De plus, pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (n,n), il faut une longueur totale qui soit un multiple de n.
D'où la conclusion :
Si m et n sont premiers entre eux, le premier multiple de n que l'on peut atteindre est le produit mn. Dans le cas général, c'est le plus petit multiple commun de m et n.
Cette solution ne suffit pas à cerner la richesse du problème. De multiples approches sont possibles. En particulier, ce problème est étroitement relié à celui du pavage d'un rectangle par des carrés identiques, comme nous allons le voir maintenant.

2.2 Une autre solution

Trois dessins sont semblables. Le plus petit en donne le prototype : il correspond au cas ou les dimensions m et n sont des nombres premiers entre eux.



La similitude de ces trois dessins amène à la conjecture :
Si m et n sont multipliés (resp divisés) par un même nombre, le nombre de carrés traversés est multiplié (resp divisé) par ce nombre. et à l'idée que l'on peut établir une formule générale en se ramenant au cas ou m et n sont premiers entre eux. C'est là que l'on retrouve le problème du pavage d'un rectangle par des carrés. En effet, si une figure peut être réduite, c'est que le rectangle peut être pavé par des carrés plus grands que ceux du quadrillage initial, et le coefficient de réduction maximal n'est autre que le pgcd de m et n.
La réponse au problème se présente alors sous la forme :

$$\frac{m \times n}{pgcd(m, n)}$$

Cette réponse peut être justifiée en prenant appui sur le résultat : Si m et n sont premiers entre eux, le nombre de carrés traversés est mn.

3 Objets potentiellement travaillés et connaissances en jeu

- Notions de multiples et de diviseurs.
- Notion de nombres premiers et de nombres premiers entre eux.
- Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.
- Calculer le PGCD et le PPCM de deux nombres entiers.
- Calcul littéral lors des conjectures et des preuves.