Les Triangles

Equipe DREAM

8 juillet 2020

Table des matières

1 Le problème mathématique **2**
1.1 L'énoncé 2
1.2 Des pistes de solution 2

2 Objets potentiellement travaillés/Connaissances en jeu **4**

3 Comptes rendus de mise en œuvre en classe **4**
3.1 Énoncé et consignes 4
3.2 Scénario 5
3.3 Productions d'élèves 5

1 Le problème mathématique

1.1 L'énoncé

1. Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?
2. Plus généralement, si on se donne trois nombres, existe-t-il toujours un triangle dont les côtés mesurent ces trois longueurs ?

1.2 Des pistes de solution

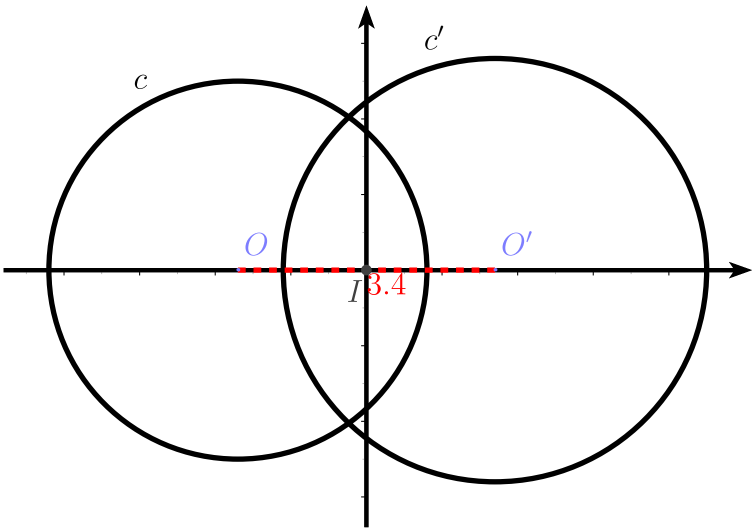
La réponse au problème découle de la propriété suivante :

Proposition 1 *Soient O, O' deux points du plan affine euclidien. Soient $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle C (resp. C') le cercle de centre O (resp. O') et de rayon r (resp. r'). On note $d = OO'$.*

1. *Si $|r - r'| < d < r + r'$ alors il existe deux points M et M' distincts tels que $C \cap C' = \{M,M'\}$;*
2. *Si $d = r + r'$ ou $d = |r - r'|$ alors il existe un unique point M tel que $C \cap C' = \{M\}$;*
3. *Si $d > r + r'$ ou $d < |r - r'|$ alors $C \cap C' = \emptyset$*

On peut démontrer cette propriété de manière analytique ou géométrique. Nous choisissons ici une preuve analytique.

Preuve : On considère un repère orthonormal $(I,\vec{i},\vec{j})$ où I est le milieu de $[OO']$.



Soit M un point du plan de coordonnées (x,y).

$$
\begin{aligned}
M(x,y) \in C \cap C' \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 &= r^2 \\ \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 &= r'^2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 &= r^2 \\ \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 &= r'^2 - r^2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 &= r^2 \\ x &= \frac{r^2 - r'^2}{2d} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y^2 &= r^2 - \left(\frac{r^2 - r'^2 + d^2}{2d}\right)^2 \\ x &= \frac{r^2 - r'^2}{2d} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

A ce stade, on constate que ce système a 0, 1 ou 2 solutions suivant si la quantité $r^2 - \left(\frac{r^2-r'^2+d^2}{2d}\right)^2$ est strictement négative, nulle ou strictement positive. Ces trois situations correspondront géométriquement aux trois cas énoncés dans la propriété (aucun point d'intersection, un unique point d'intersection ou deux moins d'intersections).

$$\begin{aligned} r^2 - \left(\frac{r^2-r'^2+d^2}{2d}\right)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4d^2r^2 \geq \left(r^2 - r'^2 + d^2\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2dr \leq r^2 - r'^2 + d^2 \leq 2dr \\ &\Leftrightarrow \quad -2dr \leq r'^2 - r^2 - d^2 \leq 2dr \\ &\Leftrightarrow \quad (r-d)^2 \leq r'^2 \leq (r+d)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |r-d| \leq r' \leq r+d \\ &\Leftrightarrow \quad |r-r'| \leq d \leq r+r' \end{aligned}$$

Donc

- $y^2 > 0 \Leftrightarrow |r-r'| < d < r+r'$
- $y^2 = 0 \Leftrightarrow |r-r'| = d = r+r'$
- $y^2 < 0 \Leftrightarrow d < |r-r'|$ ou $d > r+r'$

□

D'autres raisonnement plus géométriques sont aussi possibles pour démontrer l'inégalité triangulaire.

Proposition 2 *Soient $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors équivalence entre :*

1. *Il existe un triangle ABC de longueurs de côtés a,b et c ;*
2. *$a \leq b+c$; $b \leq a+c$ et $c \leq a+b$;*
3. *$|b-c| \leq a \leq b+c$.*

Preuve :

$2 \Leftrightarrow 3$: Comme $|b-c| \leq a \Leftrightarrow -a \leq b-c \leq a$ on obtient l'équivalence entre les points 2 et 3.

$1 \Rightarrow 3$: Le plan affine euclidien est munit d'une norme induite par le produit scalaire et les inégalités du point 2 sont obtenues de manières axiomatiques, ce qui implique que le point 3 est également vérifié.

$3 \Rightarrow 1$: Soient A et B deux points du plan tels que $AB = c$. L'inégalité $(0 <)a \leq b+c$ implique que $a^2 - 2bc \leq b^2 + c^2$. De même, l'inégalité $(0 \leq)|b-c| \leq a$ implique, en élevant au carré, que $b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$. Au final

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \in [-1; 1].$$

Il existe donc un réel α telque

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha.$$

Considérons donc un point C tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ et $AC = b$. D'après le théorème d'Al-Kashi, $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ et d'après l'égalité ci-dessus, on en déduit que $BC^2 = a^2$ donc $BC = a$ car les deux quantités sont positives. En conclusion, il existe bien un triangle ABC tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

□

Le cas d'égalité peut également se prouver avec des arguments de géométrie.

Proposition 3 *Soient trois points A,B et C trois points du plan affine euclidien. Alors*

$$AC + BC = AB \Leftrightarrow C \in [AB]$$

Preuve :

$\Leftarrow$: évident

$\Rightarrow$: Soit H un point de $[AB]$ tel que $AH = AC$ et $BH = BC$ (ce point existe bien car $AH + HB = AC + BC = AB$). Or $AH = AC$ implique de A appartient à la médiatrice de HC et de même pour B. Donc (AB) est la médiatrice de $[HC]$. Comme $H \in (AB)$, les points H et C sont confondus et le point C appartient nécessairement au segment $[AB]$.

□

Remarque : La réponse à la première question est - en fait - une question de définition. Si on considère un triangle comme une ligne brisée fermée à 3 sommets, alors oui, le premier triangle existe car $5 + 4 = 9$ (les deux cercles auront un unique point d'intersection). On dira que c'est un triangle plat.

2 Objets potentiellement travaillés/Connaissances en jeu

Au collège :

- Définition d'un triangle
- Méthode de construction à la règle graduée et au compas
- Définition et propriété des cercles
- Comparaison de nombres réels positifs
- Distance entre deux points, médiatrice d'un segment
- inégalités, inéquations

Au lycée : En plus des items du collège,

- Equations de cercles (représentation analytique d'une situation géométrique)
- Produit scalaire, utilisation de la géométrie vectorielle pour les preuves
- Résolution de système d'équations, manipulations algébriques

3 Comptes rendus de mise en œuvre en classe

3.1 Énoncé et consignes

1. Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?
2. Plus généralement, si on se donne trois nombres, existe-t-il toujours un triangle dont les côtés mesurent ces trois longueurs ?

Une reformulation orale de la deuxième question est souvent nécessaire (surtout au collège) pour permettre aux élèves de bien cerner l'ensemble du problème. Suivant le niveau de la classe, les objectifs seront différents. En cinquième, l'objectif est d'établir une condition nécessaire et suffisante sur les longueurs des côtés d'un triangle pour que celui-ci existe. Ce problème peut être traité comme un problème de recherche. Au lycée, on pourra revenir sur cette propriété bien connue des élèves mais avec cette fois-ci un objectif de preuve (partielle ou totale) rigoureuse (analytique ou géométrique). L'énoncé et les consignes devront être adaptés en conséquence.

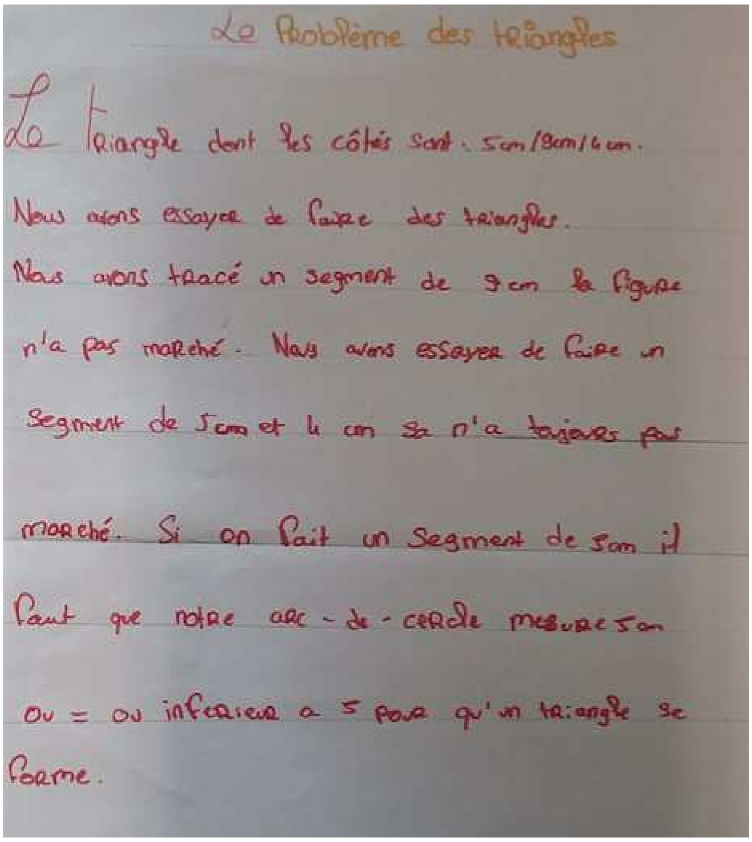
3.2 Scénario

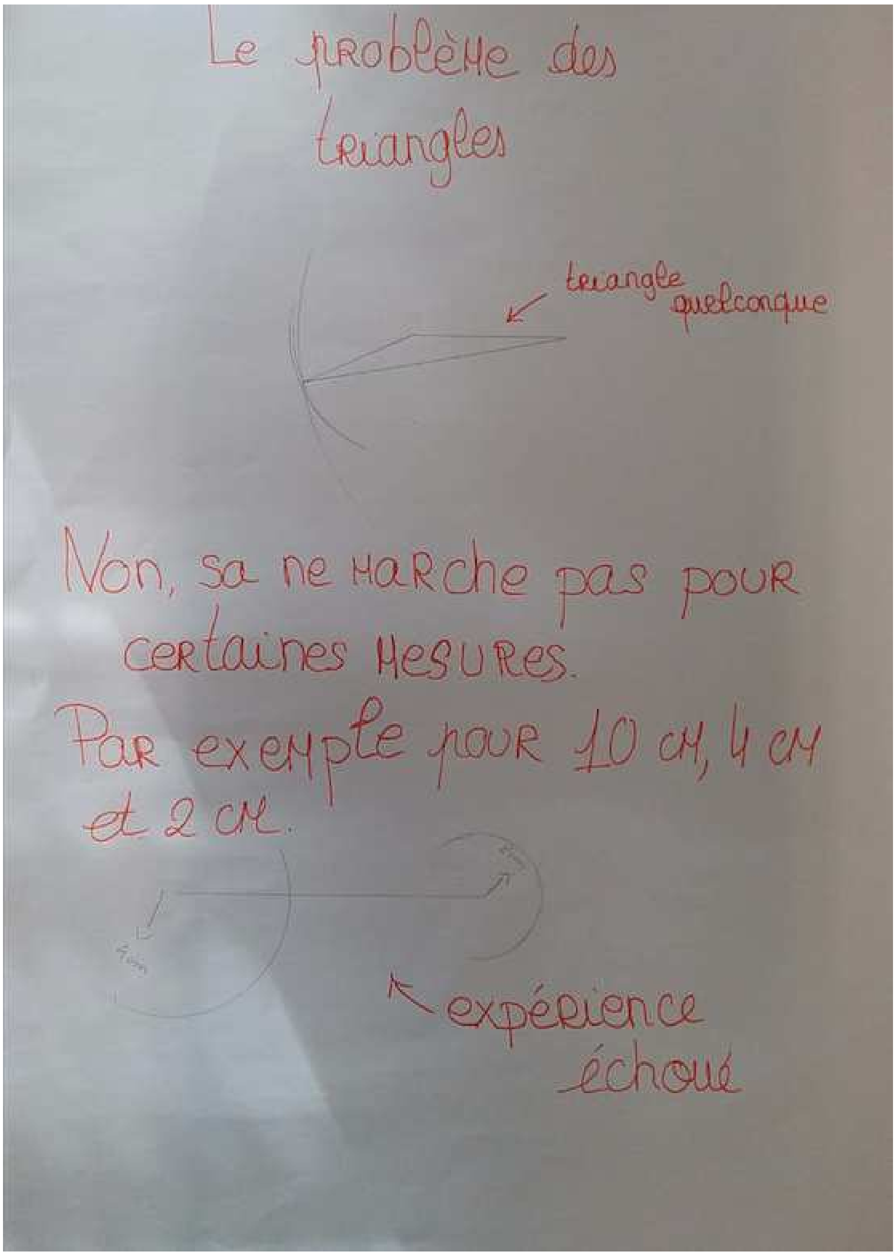
Voici une mise en œuvre possible dans des classes de collège (en début de cycle 4 de préférence) :

- Présentation de la situation et familiarisation avec l'énonce
- Temps de recherche de 5 minutes minimum
- Temps de recherche en groupe avec pour consigne une réponse à chaque question et un ou plusieurs arguments permettant d'appuyer les conjectures. La synthèse de la recherche de chaque groupe sera résumée sur une affiche (50 min)
- Temps de présentation des affiches et débats (30 min, sur une base de 7 groupes)
- Temps de bilan de la recherche, avec les résultats formulées, les mathématiques manipulées etc.

3.3 Productions d'élèves

Voici quelques extraits d'affiches faites par des élèves de cinquième :

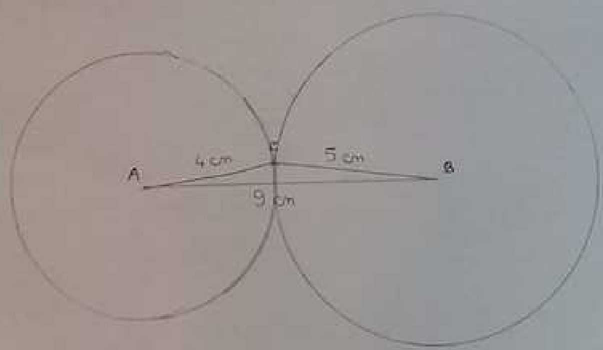



Le problème des triangles
triangle quelconque
Non, sa ne marche pas pour certaines mesures.
Par exemple pour 10 cm, 4 cm et 2 cm.
expérience échoué

Le problème des Triangles

Enoncé :

- Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm ?
  - Oui c'est un triangle quelconque.



- Plus généralement, si on se donne 3 nombres, existe-t-il toujours un triangle dont les longueurs des trois côtes sont ces trois nombres ?
  - nous pensons que la reponces est non, car si on prend des nombres avec de trop gros ecart ça ne poura jamais se relier.