N°2 | Février 2020

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Un problème pour manipuler des nombres entiers… dès l'école primaire

par Marie-Line Gardes

L'énoncé proposé aux élèves est le suivant : trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs. Les élèves travaillent en équipe de 3 ou 4. La situation comporte plusieurs étapes.

__Etape 1 :__ On propose deux suites de nombres (voir ci-dessous), les élèves réfléchissent de manière individuelle et lèvent la main lorsqu'ils ont trouvé la solution. Le plus rapide gagne.

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

__Etape 2 :__ En groupe, on propose aux élèves d'échanger sur leurs méthodes et de choisir celle qui permet de trouver la somme le plus vite possible et ce quels que soient les nombres proposés. On leur propose alors de tester leur choix sur deux autres séries de nombres.

Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

Série 4 : 84, …

__Etape 3 :__ On propose aux élèves de réfléchir aux raisons qui permettent d'expliquer pourquoi leur méthode fonctionne avec toutes les séries de 10 nombres entiers naturels consécutifs.

La situation se termine par une présentation du travail de chaque groupe et un bilan des méthodes utilisées. Le défi de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies (pour les séries) leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier. Les différentes phases garantissent des phases d'action (étapes 1 et 2), de formulation (étapes 2 et 3) et de validation (étape 3), construire les apprentissages mathématiques, en référence à la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau.

De nombreuses stratégies sont possibles. Voici deux méthodes très rapides :

• Une méthode qui consiste à utiliser la formule $10n + 45$, où n est le premier nombre de la série. Par exemple, pour la série 1, on obtient 10 x 17 + 45 = 215. Cette méthode peut être obtenue par différentes procédures : par décomposition décimale de chaque nombre de la série (17=10+7 ; 18 = 10+8 ; etc.), par décomposition de chaque nombre à partir du premier nombre de la série (18=17+1 ; 19=18+1 ; etc.), en posant l'addition en colonne (la somme des unités est toujours 45, la somme des dizaines est le premier nombre).

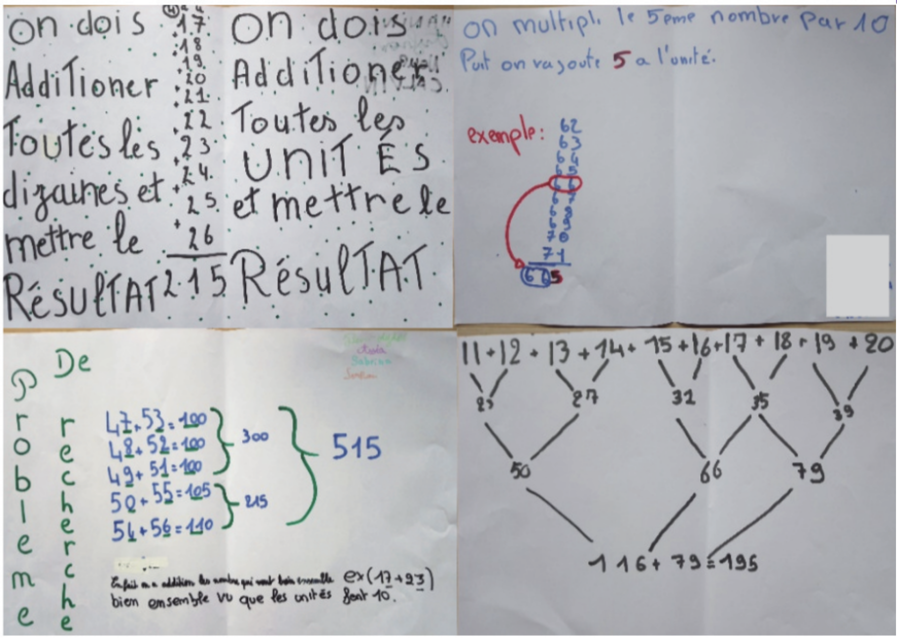
• Une méthode qui consiste à accoler 5 au cinquième nombre de la liste. Par exemple, pour la série 1,

N°2 | Février 2020

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Affiches classe de 6ème Collège Simone Lagrange, enseignant Thomas Mervant



le 5 ème nombre de la liste est 21 ; on obtient 215. Cette méthode est produite par observations des séries proposées et des résultats obtenus. Il est intéressant de remarquer que deux aspects du nombre peuvent être mobilisés : soit la numération décimale de position (et donc notre système d'écriture des nombres – lorsqu'on décompose 18 en 10+8), soit la construction des entiers via la notion de successeur (lorsqu'on décompose 18 en 17+1).

A chaque niveau de la scolarité, cette situation est riche pour les apprentissages: pratique du calcul mental et recherche de régularités pour dégager des règles générales dès le cycle 3, introduction d'une formule pour décrire un programme de calcul, donner du sens à l'utilisation des lettres au cycle 4 et travail sur les suites arithmétiques au lycée.

Ci-dessus, un exemple de productions en classe de sixième, avec plusieurs procédures utilisées.

<u>**Pour aller plus loin :**</u> cette situation peut être prolongée en ajoutant d'autres étapes. On peut ainsi proposer de calculer la somme de huit nombres entiers consécutifs, de onze nombres entiers consécutifs…voir poser la question de la généralisation de la somme de p nombres entiers consécutifs à partir de *n*. A vous de jouer ! Cette situation est issue des travaux de Barallobres (Barallobres, 2007 et Barallobres & Giroux, 2008).

L'actualité du groupe DREAM

Une nouvelle page a vu le jour sur le site Dreamaths : elle présente une répartition possible de problèmes et de SDRP par niveau au collège. L'objectif de ce travail est d'avoir une proposition cohérente permettant de balayer un maximum de compétences des cycles 3 et 4.

Des problèmes pour le cycle 3 Parmi les problèmes recensés dans les pages du site Dreamaths, beaucoup peuvent être utilisés dès le début du cycle 3. Dans cette section, nous proposons ces problèmes avec des analyses issues d'expérimentations.

N°2 | Février 2020

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Boîte à questions

Mettre en œuvre des problèmes dans la classe de mathématiques pour chercher, expérimenter et manipuler.

Attente et obstacles : Je vais avoir besoin de temps pour appréhender ce type de pratique. **Possibles réponses à apporter, attitudes à adopter :** plus l'enseignant pratique la mise en œuvre de problèmes pour chercher en classe, plus il sera à l'aise : le besoin de temps est normal. Une première idée peut être celle de se lancer en co-animation, en préparant la séance / la séquence avec le collègue qui co-enseignera avec nous. Dialoguer avec les personnes qui ont déjà l'habitude de ce type de pratique peut permettre aussi d'avoir des éclaircissements, des réponses à ses questionnements et des pistes pour les différentes évolutions possibles d'une situation. Si cela est possible, ne pas hésiter à aller visiter en direct ces collègues pendant une ou plusieurs séances de recherche avec leurs classes : cela peut répondre au besoin de voir comment peut se passer une séance avant d'expérimenter.

Attente et obstacles : Je vais devoir modifier le travail fait en équipe pour intégrer les problèmes dans ma pratique. **Possibles réponses à apporter, attitudes à adopter :** Intégrer les problèmes permet d'apporter quelque chose de nouveau à l'équipe et peut favoriser la coopération par une situation stimulante d'échanges. Une « progression commune » n'impose pas forcément une mise en œuvre commune : chaque enseignant a le libre choix des activités proposées.

Un conseil de lecture

La conjecture d'Erdös-Straus : experimentation en classe et travail du chercheur

Cet article présente une recherche de résolution d'un même problème ouvert en arithmétique par des élèves de terminale scientifique et par un mathématicien. Le but est de mettre en perspective les deux processus de recherche afin de répondre à une question didactique sous-jacente : existe-t-il des éléments dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient aider et favoriser la recherche mathématique des élèves dans le cadre de la résolution de problème de recherche ?

Les fractions égyptiennes

Enonce : *Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que :*

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ ?$$

Voici la première question, qui peut tendre vers une généralisation, de la Situation Didactique de Recherche de Problème autour des fractions égyptiennes. Celle-ci permet de travailler, entre autres, les notions de fraction, d'arithmétique et d'équation avec les élèves. Cette SDRP peut-être proposée à partir du cycle 4. Pour plus d'informations, rendez-vous sur la page dédiée au problème sur le site Dreamaths afin d'avoir une analyse mathématique de la situation, une analyse didactique ou encore des productions d'élèves (collège, lycée et supérieur).

ENS DE LYON · ifé Institut français de l'éducation · S2HEP · CRNL · IREM · Lyon 1 · INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Lyon

N°2 | Février 2020

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Retour d'expérience

Le problème qui déchire, Lycée La Martinière Duchère.

Cette situation a été présentée lors de la dernière newsletter en cycle 3. Cette fois-ci, c'est avec une classe de 1ère année de BTS qu'elle est expérimentée. La séance a durée deux heures, avec 20 élèves ayant des profils scolaires très différents (bac pro et bac technologique pour la majorité et quelques bacs généraux). La mise en œuvre est celle préconisée par le groupe DREAM si ce n'est qu'il n'y a pas eu création d'affiches ni de débat mais la production de comptes rendus écrits.

Pour cette situation, j'ai évalué les trois compétences suivantes : chercher, modéliser et communiquer. Tous les étudiants ont validé la première compétence – ce qui traduit une réelle dévolution de la situation chez les étudiants – mais les deux autres ont révélés de nettes différences entre les groupes.

À l'issue des deux heures de recherche et des comptes-rendus réalisés, voici le bilan présenté :

• **conjectures et propositions formulées :** si on déchire en 2, 2020 morceaux est atteint en 2019 étapes ; si on déchire en 3, il est impossible d'obtenir 2020 morceau ; si on déchire en 4, on peut obtenir 2020 morceaux en 673 étapes

• **notions mathématiques utilisées :** division euclidienne, divisibilité, parité, suites arithmétiques.

Deux groupes sont allés un peu plus loin. Le premier a présenté la formule *(n-1)k+1*, où *n* désigne le nombre de morceaux déchirés à chaque étape et *k* désigne le nombre d'étapes. Pour savoir si 2020 pouvait s'écrire sous cette forme, les étudiants du groupe ont utilisé un tableur avec un tableau à 2020^2 cellules (*n* varie en lignes et *k* en colonnes) et en cherchant 2020 parmi toutes les réponses. Ils se sont perdus face au nombre de cellules à analyser et n'ont pas réussi à utiliser les fonctionnalités du tableur pour effectuer cette recherche. Le second groupe a cherché de manière exhaustive toutes les déchirures possibles pour obtenir 2020 morceaux. Sur son compte-rendu, il indique la formule *(x-1)÷(y-1)* ; où, je suppose, que *x* désigne le nombre cible et *y* désigne le nombre de morceaux déchirés à chaque étape. Sans expliciter davantage à l'écrit (mais à l'oral oui), ils énumèrent les 4 découpes possibles pour obtenir 2020 morceaux.

En conclusion, cette situation a permis une réelle mise en activité et une mobilisation efficace des connaissances mathématiques antérieures des étudiants, parfaits pour aborder la suite de la séquence en arithmétique.

Antoine GUISE

"Le problème qui déchire" sur le site DREAMATHS