

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques



Des mathématiques par correspondance par Gilles Aldon

C'est encore une fois le « problème qui déchire » (Voir [Newsletters 1](#) et [Newsletter 2](#)) qui est à l'honneur dans cette rubrique ! Je l'ai en effet proposé à une classe de quatrième. Mais, dans des conditions un peu particulières puisque les élèves participaient à un club de mathématiques dans leur collège à Gap et que j'étais dans mon bureau à Lyon. C'est donc à travers notre correspondance, sur environ trois semaines, que je rends compte des recherches des élèves (et bien sûr aussi à partir des discussions que j'ai eues avec l'enseignant responsable du club !). Les élèves ont travaillé par groupe durant les heures prévues pour le club, certains ont continué à chercher à la maison et la communication entre nous s'est effectué par courriel. Il est intéressant de voir la façon d'écrire les messages qui évolue en

même temps que les raisonnements s'affinent ; le premier message proposait une réponse qui semblait définitive, comme l'illustre cet extrait de l'un des groupes :

**« Bonjour,
Je vous écris pour le
premier problème que
vous avez posé.
Voici notre réponse :
À l'étape 0 nous avons 1
bout de papier
À l'étape 1 nous avons 2
bouts de papier [...] »**

Les groupes dans cette première correspondance proposent des exemples, sans raisonnements, rendant compte des expériences réalisées. J'ai évidemment répondu à tous les messages pour encourager les élèves mais aussi pour demander des précisions et pour diriger les recherches, mais sans jamais proposer de pistes de solution ; progressivement

les élèves, en prenant en compte mes messages, ont avancé dans la compréhension du problème général :

**« [...] Nous avons bien
reçu votre message et
nous avons trouvé une
formule pour trouver le
nombre d'étapes pour le
découpage en 3.
La formule est $1+2xn$. [...] »**

Des nouveaux outils sont convoqués pour répondre à mes interrogations :

**« [...] On a remarqué que
les découpes où on obtient
2018, sont des diviseurs
des 2018. Donc j'ai utilisé
Scratch pour obtenir la
liste des diviseurs de 2018
et donc la liste des
découpes possibles. Donc
les découpes possibles
sont 2 (en 2017 étapes);
1009 (en 2 étapes); et 2018
(en 1 étape) [...] »**

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques

Ma réponse a encore permis d'approfondir les recherches qui font maintenant apparaître un raisonnement solide qui montre une compréhension profonde du problème posé :

« **Merci, en effet nous nous sommes trompés, mais on a essayé avec 2017 car : Si on appelle A le nombre à atteindre, n le nombre d'étapes et d le nombre "en combien on déchire" le nombre de morceaux à l'étape n :**

1 : étape 0

$1+(d-1)$: étape 1

**$1+(d-1)+(d-1)$
 $= 1 + (d-1) \times 2$: étape 2**

**$1+(d-1)+(d-1)+(d-1)$
 $= 1 + (d-1) \times 3$: étape 3**

$1+(d-1) \times n$: étape n

**On cherche à résoudre
 $1+(d-1) \times n = A = (d-1) \times n = A-1$**

Donc on pourra atteindre l'année A avec des découpages en d morceaux si (d-1) divise (A-1) [...]»

Non seulement on peut percevoir dans cette courte correspondance l'évolution du vocabulaire qui traduit une mise en perspective des expériences concrètes avec le domaine des mathématiques, mais également l'évolution des méthodes de recherche, en revenant sur les expériences réalisées et en développant des connaissances mathématiques et un discours sur les mathématiques que les élèves sont en train de créer. Le professeur en charge du club m'a fait part de la très grande motivation des élèves liée d'une part, à l'excitation de rentrer dans une communication scientifique avec un chercheur et d'autre part, au fait qu'ils avaient à me rendre compte par écrit de leurs recherches :

«[...] tu vas recevoir des mails d'élèves, ils sont en train de chercher, le travail de rédaction à ton attention est un vrai travail! [...]»

Le statut de l'écrit est ici valorisé en prenant un caractère plus authentique que dans le cas d'une rédaction scolaire en direction du professeur ou des autres élèves. Chercher des problèmes « à distance » et communiquer ses recherches par écrit est une forme très intéressante de mise en œuvre de SDRP qui, dans la période actuelle, pourrait être une alternative fructueuse pour l'enseignement des mathématiques à distance !

Gilles ALDON

[LE PROBLÈME QUI DÉCHIRE SUR LE SITE DREAMATHS](#)



Retour d'expérience

Le problème qui déchire, Collège Saint Thomas d'Aquin-Veritas

à Oullins

Le «problème qui déchire», prévu pour clore la séquence «Arithmétique» avec ma classe de 3e, a été vécu pendant le confinement du printemps 2020 et a dû être adaptée au mode «travail à distance». Il me paraissait toutefois intéressant de le proposer aux élèves, à la fois pour son côté ludique (déchirer du papier quand on est confiné, c'est faire des mathématiques autrement) et pour son potentiel, à la fois de recherche (les questions ne sont pas classiques) et de modélisation mathématique (comme tâche complexe en fin de séquence sur l'arithmétique).

Mon objectif était :

- De proposer une vraie situation de recherche aux élèves, car en confinement nous avons beaucoup travaillé par simples exercices d'application du cours ;
- De proposer une situation ludique qui vienne bousculer les codes de ces élèves ;

- De permettre d'ancrer les connaissances nouvellement acquises sur les diviseurs et nombres premiers.

Le sujet a été envoyé aux élèves en google doc, accompagné d'une vidéo de présentation proposée par Gilles Aldon ; la forme de réponse proposée aux élèves était assez libre, et la consigne donnait une semaine pour répondre aux questions.

Les élèves ont cherché, pour la plupart individuellement, même si certains binômes ont été identifiés à la correction ; plusieurs élèves m'ont interpellée pour savoir s'ils partaient sur une «bonne piste». Un seul élève n'a répondu qu'à la première question et ne m'a pas sollicitée, s'arrêtant au « je n'ai pas compris ».

Les productions sont variées : 13 élèves répondent aux questions directement dans le document, 5 élèves ont utilisé un tableur et 1 élève a envoyé une vidéo pour montrer sa démarche .

Interrogés par sondage sur leur façon de procéder, deux tiers des élèves affirment avoir réellement déchiré du papier pour comprendre le mécanisme.

La plupart des productions sont incomplètes :

- L'hypothèse n'est pas poussée jusqu'au bout «ce sont tous les diviseurs de...», non accompagnée de la liste des diviseurs.
- L'hypothèse n'est pas vérifiée «ce sont les découpes en 1, 2, 1009, 2018 qui permettent d'obtenir 2019» !
- Le raisonnement est compris pour les découpes en 2,3,4, mais la recherche des autres découpes possibles conduit à une impasse.

Le recours à l'abstraction, même en fin de 3^e, est difficile. 15 élèves seulement (donc moins d'un sur deux) avancent une explication mathématique en faisant référence à un modèle (diviseur, mise en

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques

équation, suite). Par ailleurs, même si 82% des élèves ont bien vu que «en découpant en 2, on ajoute un morceau de papier à chaque étape», seulement la moitié pense qu'on peut atteindre tous les nombres par ce type de découpe lorsqu'on les interroge par sondage à l'issue du travail.

Ce travail a permis de découvrir qu'en fin de 3^e, un tiers des élèves ne maîtrise pas encore les bases de l'arithmétique : confusion diviseur/multiple, incapacité à lister tous les diviseurs d'un nombre (1 et le nombre lui-même sont souvent oubliés ; la recherche se fait de façon non systématique. Exemple : les diviseurs de 2019 sont 1, 673 et 2019, en oubliant 3 !), mauvaise perception des nombres premiers (2021 = 43 x 47 mais certains me le disent premier).

Du fait du grand nombre d'erreurs de calculs ou de raisonnement relevés, le travail à distance a été suivi d'une heure de travail en visioconférence ; nous

avons, pendant cette heure, examiné plusieurs des réponses ou hypothèses qui avaient été posées, en essayant de voir leur validité. Nous avons également reprécisé les notions de «diviseur» et de «multiple», revu les critères de divisibilité et la façon de lister les diviseurs d'un nombre. Enfin, nous avons vu les 4 étapes de la recherche :

- 1. Manipulation**
- 2. Formulation d'hypothèse**
- 3. Modélisation mathématique**
- 4. Vérification**

Ce travail en visioconférence a permis de débattre des hypothèses formulées, de faire «toucher du doigt» aux élèves les erreurs de raisonnement ou de langage.

Cette expérimentation m'a permis de voir que les tâches complexes permettent de consolider les connaissances, ou de mettre en relief des connaissances

trop imprécises (comme la notion de «diviseur» dans cet exemple). Par ailleurs, ce travail a mis en lumière les difficultés liées à la démarche de recherche elle-même : plusieurs élèves sont restés au stade de manipulation passive, ils ont effectivement déchiré le papier mais n'ont pas mis en œuvre de modélisation, même partielle. D'autres ont avancé des hypothèses mais ne les ont pas vérifiées. La contrainte du travail à distance a probablement pénalisé cette démarche car il m'était moins facile de les stimuler pour aller plus loin dans leur raisonnement.

Pascale HALGAND

Retour d'expérience

Les triangles rectangles entiers, Collège Xavier Bichat à Nantua.

Cette année, j'ai décidé de fonder mes progressions de 5^e et 3^e autour de SDRP. Celle que je vais vous présenter est la première de l'année avec mes 3^e. Ma classe de 3^e cette année est une classe agréable, avec une toute petite tête de classe entourée de nombreux élèves en difficultés, voire en décrochage scolaire.

En Octobre, je les ai fait travailler sur le problème suivant : existe-t-il des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier naturel ? Première interrogation : comment vont-ils se comporter pendant le travail en groupes ? C'est la 1^{ère} fois de l'année que je les fais travailler ainsi, et je ne suis pas à l'aise avec cette façon de travailler.

Après avoir expliqué ce que j'attendais d'eux, cette heure s'est vraiment très bien passée. Tous les élèves ont cherché (certains moins longtemps que d'autres), ce qui est plutôt rare lors des séances d'exercices «traditionnels».

En fin d'heure, je suis reparti avec 6 affiches différentes, et dont j'ai pu faire une progression vraiment intéressante. Pendant la 2^{ème} heure de travail, chaque groupe est venu au tableau présenter son travail, dans l'ordre que j'avais choisi. Ils ont tous apporté quelque chose d'intéressant sur lequel j'ai pu m'appuyer pour construire une leçon. Les groupes les plus faibles se sont contentés de tracer des triangles rectangles et de mesurer, d'autres ont essayé d'utiliser le théorème de Pythagore avec plus ou moins de réussite, en essayant de se rappeler ce qu'ils avaient fait en 4^e. Un groupe a remarqué qu'une fois un triangle trouvé, il suffisait de l'agrandir pour en trouver une infinité d'autres...

Au final, j'ai eu dans les affiches toutes les notions que je voulais travailler et nous avons pu faire quelques rappels intéressants que je n'aurais pas pris le temps de faire les autres années.

Nous avons commencé par

rappeler des mots de vocabulaire, comme nombre entier naturel, revoir le vocabulaire lié au triangle rectangle, travailler sur le carré et la racine carrée d'un nombre.

Ensuite, ils ont compris l'intérêt de la démonstration : le triangle de dimensions 5 cm, 5 cm et 7 cm semble rectangle, il faut utiliser le théorème de Pythagore pour prouver qu'il ne l'est pas. Nous en avons profité pour prouver qu'aucun triangle isocèle rectangle ne convenait pour le problème, en passant par l'irrationalité de nombre, notion que je n'aurais jamais pensé aborder avec mes élèves... Cela m'a permis de revoir les rédactions attendues pour calculer la longueur d'un côté ou pour prouver qu'un triangle est, ou n'est pas, rectangle.

J'ai profité d'une affiche pour travailler, sans rentrer dans les détails, les agrandissements et réductions, les triangles semblables, puis nous avons terminé avec le théorème de Thalès. C'est la 1^{ère} fois que je

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques

commence par les triangles semblables avant Thalès, et j'ai trouvé l'enchaînement intéressant, et j'ai eu l'impression que c'était plus clair pour les élèves. C'est la première année où je vois des élèves faire des tableaux de proportionnalité sur les côtés correspondants de 2 triangles semblables lorsqu'ils utilisent le théorème de Thalès. Le bilan que je fais de ce chapitre est très positif. Les notions se sont bien enchaînées, les élèves ont été vraiment acteurs de leur leçon. Je n'ai rien ajouté par rapport à ce qu'ils avaient trouvé en groupes. Par contre, cela prend beaucoup de temps (quasiment 2 mois, avec une interruption de 2 semaines de vacances). Ce n'est pas du temps perdu, mais les élèves se retrouvent avec une très grande partie leçon où beaucoup de notions ont été abordées, et j'ai vu plus tard dans l'année qu'il leur était très difficile de savoir où trouver l'information qu'ils cherchaient.

Rémy DUNEZAT



[LES TRIANGLES](#)
[RECTANGLES ENTIERS](#)
[SUR LE SITE DREAMATHS](#)

L'actualité du groupe DREAM

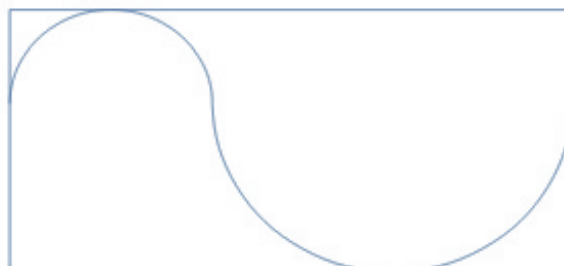
Formation continue

La stage IREM proposé par notre groupe a été chaotique cette année : après un déplacement de la première journée (qui était prévue initialement le 5 décembre, jour de grève interprofessionnelle), la seconde journée s'est déroulée confinée et à distance, le jeudi 7 mai, avec au programme : un petit quizz, une présentation des progressions annuelles à l'aide du site et des échanges autour des obstacles et attentes pour la mise en œuvre d'un enseignement fondé sur les problèmes. Merci à tous les participants d'avoir suivi ce stage un peu extraordinaire!

Du nouveau pour l'année prochaine

Bonne nouvelle !! Nous avons été retenu pour constituer un LÉA (Lieu d'éducation Associé à l'IFE). Il s'appellera DuAL Lyon (Duchère-Ampère-Lagrange Lyon) et a pour ambition d'explorer, à plus grande échelle et dans un contexte ordinaire, les conditions et contraintes pour qu'un enseignement des mathématiques fondé sur la résolution de problèmes, permette des apprentissages mathématiques chez les élèves. Pour plus d'infos sur les LÉA : <http://ife.ens-lyon.fr/lea>

Un petit problème : manque t-il une donnée?



Le périmètre vaut 6.
Quelle est la longueur des deux demi-cercles?

Retour d'expérience

Les fractions égyptiennes, Lycée Édouard Herriot à Lyon.

Je travaille depuis plusieurs années à la construction d'une progression dans laquelle figurent des problèmes de recherche à proposer aux élèves. L'objectif est d'en proposer un par période, en début de séquence pour voir ce que les élèves arrivent à mobiliser.

Le problème des Fractions Egyptiennes a été le premier travail que j'ai proposé aux élèves de seconde le tout premier cours de l'année. J'ai choisi cette SDRP (situation didactique de recherche de problèmes) pour retravailler le calcul numérique et revoir les propriétés des nombres réels. Lors de la phase de débat, les élèves ont pu travailler sur le raisonnement par l'absurde, puis on a pu enchaîner sur les démonstrations du type « $\frac{1}{3}$ n'est pas nombre décimal ».

Voici l'énoncé donné aux élèves :

- Peut-on trouver deux entiers naturels a et b distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$?

- Peut-on trouver trois entiers naturels a , b et c distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$?

- Peut-on trouver quatre entiers naturels a , b , c et d distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$?

La mise en place s'est composée d'une heure de recherche individuelle et de groupe, une heure de présentation du travail de certains groupes au tableau et de débat. En cette première situation, la recherche n'a pas été évaluée.

Pour la phase de débat, j'ai effectué une sélection des productions des groupes et j'ai donné deux instructions à la classe : premièrement, chaque élève doit écrire un compte rendu des présentations des groupes qui passaient au tableau. Ce compte rendu doit inclure les notes écrites au tableau par les élèves et les commentaires faits au cours du débat. Cela sera évalué. En second lieu, l'évaluation portera aussi sur la participation au débat en

termes de questionnements et critiques. Au cours des présentations, j'ai noté les élèves qui ont donné leur contribution à l'oral.

Au cours du débat, beaucoup d'hypothèses ont été formulées, sans preuve. Ceci a permis de travailler de façon très intéressante le raisonnement par l'absurde, d'avancer ensemble par des toutes petites démonstrations. Par moment, j'ai eu besoin de guider les élèves par le questionnement, par exemple « Supposons que cela soit vrai, est-ce que ce serait possible que... ? ». Cette phase a été sans doute la plus intéressante.

A partir des traces écrites des élèves et de leurs productions j'ai rédigé un bilan écrit plus construit avec les remarques et les raisonnements proposés par les élèves pour les différentes questions du problème.

**Delphine
THEREZ**



[LES FRACTIONS EGYPTIENNES SUR LE SITE DREAMATHS](#)

Retour d'expérience

Les fractions égyptiennes, Collège Émile Zola à Belleville.

J'ai travaillé avec mes classes de 4^e sur la SDRP intitulée « Les fractions égyptiennes ».

J'ai choisi ce problème en introduction de la séquence sur les fractions, sans aucun rappel préalable sur cette notion. L'objectif était de reconstruire ou de raviver le sens même de la fraction, mais également d'aboutir à la propriété d'addition de fractions.

J'y ai consacré entre sept à neuf séances suivant les classes : deux heures de recherche en classe, une heure de présentation des résultats par les élèves et quatre à six heures de débat/bilan.

Lors de la phase de recherche, les élèves ont été très actifs. Le problème est facile à comprendre et les élèves se lancent rapidement dans la recherche.

A la fin de la séance de présentation des résultats, nous avons listé dans le

cahier les conjectures émises par la classe.

La phase de débat/bilan a consisté en l'étude, par les élèves, de chacune des conjectures émises : pour chaque conjecture, le débat était engagé. Je laissais les élèves présenter leurs arguments en faveur ou contre la conjecture étudiée, puis organisais le bilan.

Voici quelques exemples intéressants de conjecture et le bilan associé :

$$\bullet \frac{1}{1} + \frac{1}{0} = 1$$

Dans le bilan, nous avons rappelé le sens de la fraction comme fraction partage et donc l'incohérence de $\frac{1}{0}$.

$$\bullet \frac{1}{1} + \frac{1}{100000000} = 1$$

Dans le bilan, nous avons noté que $\frac{1}{1} = 1$, donc qu'il est impossible d'obtenir 1 en ajoutant un nombre strictement positif. Ca a été l'occasion de rappeler qu'il faut se méfier de la calculatrice, car c'est cet outil qui a guidé les élèves vers cette conjecture.

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

est la seule solution pour la première question. Dans le bilan, nous avons évoqué la décroissance de $\frac{1}{n}$.

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Cette conjecture a été l'occasion d'aborder l'addition de fractions, en se basant sur une schématisation des fractions partage. La nécessité de mise au même dénominateur apparaît naturellement. Cette conjecture a aussi été l'occasion de discuter autour des valeurs décimales des fractions car certains élèves ont objecté que la somme de ces trois fractions ne pouvait être 1 dans la mesure où $0,5 + 0,33 + 0,16 = 0,99$.

Cette phase de débat/bilan est, à mon sens, la plus intéressante. Les élèves ont pu remobiliser leurs connaissances sur les fractions et remettre du sens dans cet objet mathématique qui les met souvent en difficulté.

Aurélia TACONET

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques

Retour d'expérience

Le plus grand produit, École du Rocher (REP+)

à Pierrelatte.

Dans notre deuxième année d'expérimentation, nous avons renforcé notre mise en œuvre de SDRP et commencé à élaborer une programmation des situations sur l'ensemble du cours moyen. Nous avons fait les choix suivants :

- CM1 : Le plus grand produit, Le problème qui déchire, la boîte sans couvercle
 - CM2 : Somme de dix entiers consécutifs, Les fractions égyptiennes, L'Antarctique
- En raison du confinement, seules trois situations ont pu être menées à ce jour.

Le plus grand produit a donc été mis en œuvre en CM1. Lors de la première séance, les élèves ont dû chercher, à partir des décompositions additives du nombre 10 (par exemple : $2 + 5 + 3$), le plus grand produit possible ($2 \times 5 \times 3 = 30$ n'est pas ici le plus grand). L'enseignante, après avoir montré l'obtention d'un premier produit à partir d'une décomposition, a mis les élèves au travail. Certains élèves ont eu du mal à calculer des produits de trois facteurs ou plus, ne sachant comment procéder. Il semble donc qu'il s'agisse d'un

préalable dont il est nécessaire de s'assurer. Dès la première recherche, un élève a pensé que la décomposition additive devait contenir beaucoup de nombres. Lors de la phase collective, le plus grand produit a été proposé (36) sans que la classe soit sûre d'avoir trouvé le plus grand. Une nouvelle recherche a eu lieu avec 14. Lors de cette deuxième phase collective, deux idées ont été exprimées par deux élèves différents quant aux conditions à remplir pour trouver le plus grand produit :

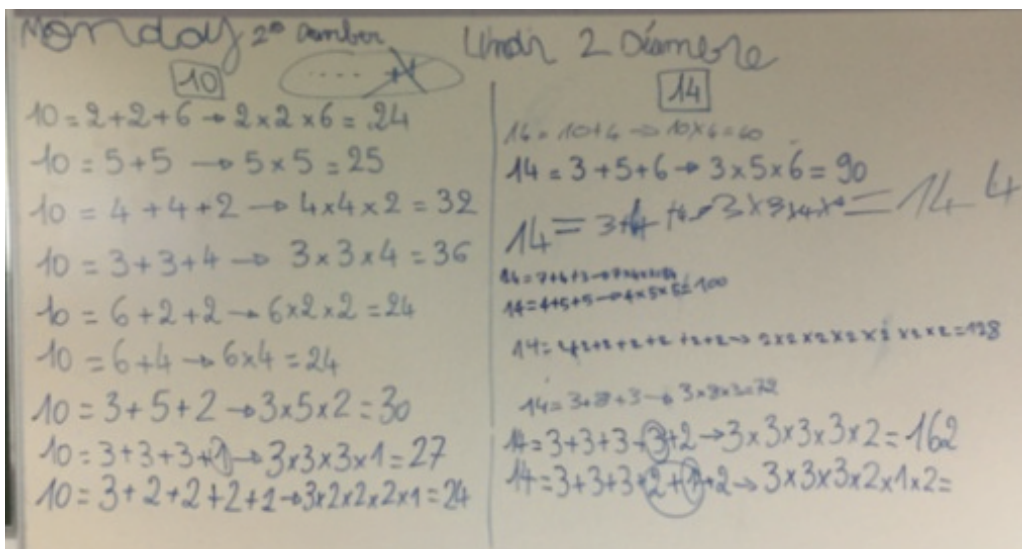


Figure 1 -

Tableau à la fin de la première séance de recherche

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour
l'Enseignement et l'Apprentissage
des Mathématiques

- nécessité de mettre le maximum de nombres dans la décomposition ;
- inutilité du 1 dans la décomposition.

Une deuxième séance est proposée au cours de laquelle les élèves vont devoir, par groupe de trois, chercher une méthode qui permettrait de trouver le plus grand produit. Certains élèves ont du mal à passer de la recherche d'un plus grand produit sur un nombre donné à la recherche d'une méthode générale. Plusieurs critères sont proposés lors de la phase collective :

- mettre le plus de nombres possible dans la décomposition ;
- mettre des petits nombres (2, 3) puis après des plus grands nombres (6, 7, 8, 9) ;
- ne pas mettre de 1, ni beaucoup de nombres ;
- ne pas mettre de 1 et ne mettre que des petits nombres (2, 3, 4).

Les propositions sont ensuite débattues collectivement, avec appui principalement sur des contre-exemples. Finalement, seule la dernière est retenue par les élèves. Cette situation a servi de point d'appui à l'enseignante

pour travailler le calcul en ligne et tout particulièrement la commutativité de la multiplication, propriété qui facilite grandement certains calculs ($4 \times 17 \times 25$). Elle a souhaité également reprendre cette situation quelquefois dans l'année dans le cadre des rituels mathématiques mis en place.

Stéphanie AUBERT

Anne-Christelle LANGARD

Stéphane DÉGEORGES



[LE PLUS GRAND PRODUIT](#)
[SUR LE SITE DREAMATHS](#)

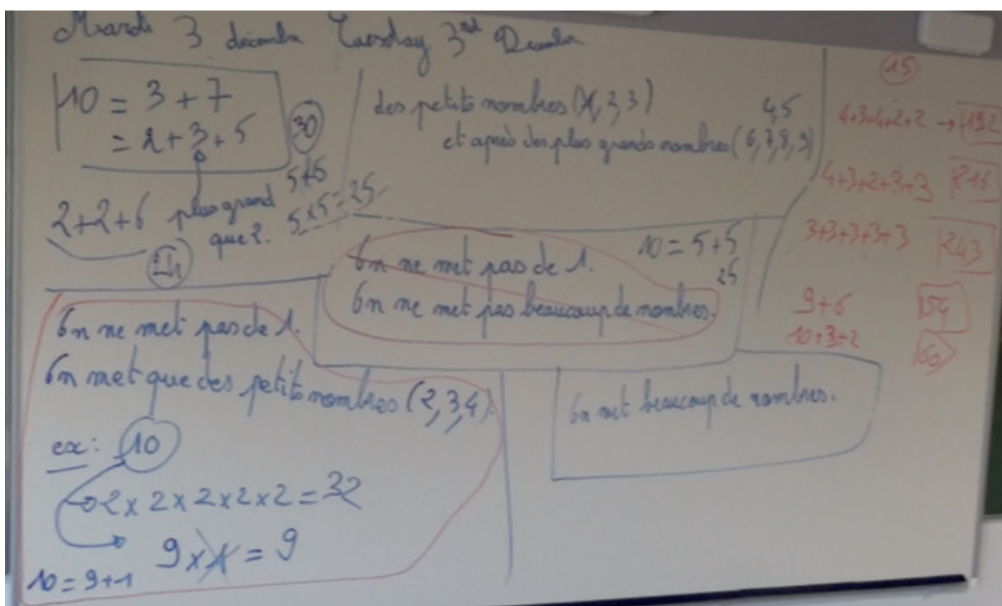


Figure 2 -

Tableau à la fin de la deuxième séance de recherche