Le problème qui déchire
Analyse didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

1.1 Première partie

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.
Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?...
Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais atteindre 2017 ? 2018 ?

1.2 Deuxième partie

Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?
Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ?... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 (2017,2018,...) morceaux de papier ? Si oui, pourquoi et si non, quand est-ce que je ne peux pas ?

2 Variables de la situation

L'énoncé proposé dans le paragraphe précédent peut être modifié en jouant sur le nombre de découpes que l'on peut faire du papier. S'intéresser par exemple au découpage en 2 morceaux et poser la question du nombre d'étape pour obtenir un grand nombre. Dans les petites classes, commencer par le découpage en 2 morceaux permet, pour les élèves, d'obtenir très vite un résultat et donc de participer à la dévolution du problème.
Le nombre à atteindre : on peut, comme dans l'énoncé du paragraphe précédent utiliser un nombre qu'il sera difficile d'atteindre en découpant le papier, ce qui a pour conséquence d'imposer une réflexion, mais peut-être aussi de décourager prématurément. Si, au contraire, on veut laisser plus de temps pour la manipulation, on peut demander d'obtenir 10 ou 11 morceaux de papiers avec des découpes en 3 (par exemple) ; dans ces conditions l'expérience est possible et l'impossibilité d'obtenir 10 morceaux de papier va permettre de questionner ce résultat. Pour des plus grands, on peut demander directement d'obtenir n morceaux de papier, mais l'énoncé induit alors un raisonnement et peut empêcher de comprendre dans un premier temps le problème pour construire son raisonnement.
Il n'est pas nécessaire, surtout à 'école et même au collège, d'évoquer la deuxième partie du problème, sachant que la résolution mathématique du cas général ne pourra pas être abordé. Ça peut cependant être un prolongement possible pour des élèves qui auraient bien compris la première partie.
La question : « quelles sont les découpes qui me permettent d'obtenir ...morceaux de papier ? » là encore peut être modifiée par le choix du nombre de bouts de papier : choisir 12, par exemple, peut permettre de s'apercevoir qu'on ne pourra l'atteindre qu'en découpant en 2 et en 12. L'étude exhaustive est possible :

- découpage en 2 : ça marche puisque l'on peut atteindre tous les nombres,

- découpage en 3 : non (on ne peut atteindre que les nombres impairs),
- découpage en 4 : 1 - 4 - 7 - 10 - 13, ce n'est donc pas possible,
- découpage en 5 : 1 - 5 - 9 - 13, même résultat,
- découpage en 6 : 1 - 6 - 11 - 17, même résultat,
- découpage en 7 : 1 - 7 - 13, même résultat,
- découpage en 8 : 1 - 8 - 15, même résultat,
- découpage en 9 : 1 - 9 - 17, même résultat,
- découpage en 10 : 1 - 10 - 19, même résultat,
- découpage en 11 : 1 - 11 - 21, même résultat,
- découpage en 12 : 1 - 12 et ça marche !

L'expérience est intéressante en ce sens qu'elle donne des résultats sur les exemples traités qui peuvent ensuite être généralisés. La question peut alors être posée avec 13, et en ayant noté les résultats précédents, on voit facilement, que 13 va pouvoir être atteint avec des découpes en 2, 3, 4, 5, 7 et 13. Avec ces deux expériences, la question de la relation du nombre de morceaux de papiers et du nombre de possibilités de l'atteindre se pose : pourquoi y-en-a-t'il tant pour 13 et si peu pour 12 ?

3 Connaissances et capacités en jeu

3.1 Compétences transversales

Ce sont toutes les compétences visées par les programmes qui sont en jeu, en particulier : « *L'acquisition des quatre opérations sur les nombres, sans négliger la mémorisation de faits numériques et l'automatisation de modules de calcul, se continue dans ce cycle. Les notions mathématiques étudiées prendront tout leur sens dans la résolution de problèmes qui justifie leur acquisition.*» (Idem, cycle 3, page 3).
Par ailleurs, les compétences visées dans le cycle 3 s'appuie largement sur la recherche de problèmes : « *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* ».(idem, page 72)
Mais aussi, il s'agit de représenter le problème et d'utiliser une schématisation permettant de comprendre et de faire apparaître des propriétés des nombres, ce qui constitue également une compétence visée dans les programmes : « *Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages,...* » (idem, page 72) Ou encore, « *Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre le point de vue d'autrui* ».

3.2 Connaissances mathématiques

Evidemment des connaissances liées à la structure des nombres et aux opérations. D'un point de vue savant, le problème revient à la résolution d'une équation diophantienne à deux inconnues qui demande pour sa résolution la connaissance des théorèmes de Bezout et de Gaus. Pour les élèves de CM2 et de sixième, les connaissances nécessaires pour trouver des résultats sont celles des programmes de mathématiques :
« *Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10),[...] résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations. Sens des opérations.*».(Programmes, cycle 3, page 75).

Les nombres, leur écriture et les opérations sont au cœur de ce problème, ce qui fait écho au texte du programme : « *Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs.* ».
Mais ce sont aussi toutes les compétences visées par les programmes qui sont en jeu, en particulier : « *L'acquisition des quatre opérations sur les nombres, sans négliger la mémorisation de faits numériques et l'automatisation de modules de calcul, se continue dans ce cycle. Les notions mathématiques étudiées prendront tout leur sens dans la résolution de problèmes qui justifie leur acquisition.*» (Idem, cycle 3, page 3).
Par ailleurs, les compétences visées dans le cycle 3 s'appuie largement sur la recherche de problèmes : « *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* ».(idem, page 72)
Mais aussi, il s'agit de représenter le problème et d'utiliser une schématisation permettant de comprendre et de faire apparaître des propriétés des nombres, ce qui constitue également une compétence visée dans les programmes : « *Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages,...* » (idem, page 72)
Ou encore, « *Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre le point de vue d'autrui ».*
Les nombres, leur écriture et les opérations sont au cœur de ce problème, ce qui fait écho au texte du programme : « *Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs.* ».
On retrouve des éléments identiques dans les classes de collège et de lycée, tant dans l'objectif de comprendre et de manipuler les nombres que dans ceux de chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et bien sûr communiquer.

- chercher : les questions posées sont ouvertes et demandent que les élèves se posent des questions et cherchent une façon de résoudre le problème qui n'est pas donnée *a priori.*
- modéliser : pour résoudre le problème, les élèves sont amenés à abandonner l'expérience pour modéliser le problème comme un problème d'arithmétique.
- représenter : pour faire apparaître des régularités, la représentation des résultats est bien sûr fondamentale, en utilisant par exemple des tableaux qui permettent de faire apparaître une construction par récurrence et une construction fonctionnelle entre le nombre d'étapes et le nombre de morceaux de papier.
- raisonner : Les élèves sont amenés à faire le lien entre les résultats des expériences et les concepts mathématiques de nombre, de division euclidienne, de diviseurs d'un nombre...dans le domaine de l'arithmétique.
- calculer : les différentes expériences menées en classe montrent que les élèves font un très grand nombre de calculs (multiplications, divisions) pour atteindre les résultats.
- communiquer : l'organisation de la classe est ici importante pour que les résultats obtenus puissent être communiqués en faisant référence à la fois aux expériences et aux raisonnements construits sur les résultats de ces expériences.

Au lycée, on peut imaginer deux stratégies d'enseignement, la première consistant à faire apparaître l'équation diophantienne $ux + vy = w$ puis de montrer sa résolution dans un cas général ou au contraire de proposer le problème alors que les élèves savent déjà résoudre cette équation.

4 Procédure(s) élèves

Les élèves peuvent être surpris par le problème et ne pas savoir dans quelle direction chercher. Je donne ci-dessous quelques indications permettant d'aborder les problèmes sous-jacents :

- Ne pas hésiter à faire faire l'expérience en notant bien à chaque étape le nombre de morceaux de papier.
- Si 2016 paraît trop loin et trop compliqué, donner un but plus raisonnable : est-ce que 10, ou 20, ou…pourra être atteint ?
- Retirer du résultat obtenu, non seulement le résultat mais surtout la méthode. Pourquoi avec des découpages en 2 morceaux, on peut atteindre 10, 20,…et pas avec des découpages en 3 ? Que l'on peut atteindre 10 mais pas 20 avec des découpages en 4 ?
- Avant de répondre à la question, quels sont les découpages qui permettent d'atteindre (un grand nombre), essayer encore avec de plus petit nombres : par exemple, 19 ou 20, ou 60 et 61… Comment expliquer cette différence entre deux nombres consécutifs ?
- Faire écrire toutes les remarques sur les nombres, sur les opérations.
- Ne pas hésiter à demander aux élèves de schématiser leurs recherches.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

L'avantage de ce problème est certainement que tous les élèves peuvent trouver rapidement des premiers résultats. La difficulté qui peut être rencontrée est de s'arrêter à ces premiers résultats et de ne pas faire la démarche de va et vient entre expérience et concepts mathématiques. En fonction des élèves, il est important de jouer sur les variables didactiques pour permettre et encourager ce passage.
Au niveau du lycée, on peut s'attendre à un raisonnement trop rapide et faux consistant à modéliser par une suite géométrique. Il est important de s'assurer que les élèves ont bien compris qu'il faut re-découper un seul des morceaux présents et non pas tous.