Le problème qui déchire
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

1.1 Première partie

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.
Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?...
Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ?
Et si je voulais atteindre 2017 ? 2018 ?

1.2 Deuxième partie

Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?
Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ?... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 (2017,2018,...) morceaux de papier ? Si oui, pourquoi et si non, quand est-ce que je ne peux pas ?

2 Ouvertures mathématiques

2.1 Rappel

On a vu dans l'analyse mathématique du problème que l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = 1$ est :

$$S = \{(u + kb, v - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Et l'équation $(ax + by = c)$:

$$S = \{(uc + kb, vc - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

2.2 Prolongement

Il est possible de prolonger le problème en considérant cette fois, que l'on peut couper la feuille en $a_1, a_2, \dots a_n$ morceaux de papier. Avec un raisonnement semblable à ceux donnés dans l'analyse mathématique du problème, pour répondre à la question : peut-on atteindre le nombre c, on sera amené à résoudre l'équation :

$$(a_1 - 1)x_1 + (a_2 - 2)x_2 + \cdots + (a_n - 1)x_n = c - 1$$

Ce qui nous amène à résoudre des équations générales du type

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = v$$

2.3 Cas particulier

Avant d'aborder le cas général, voyons la résolution d'une équation de la forme :

$$u_1x + u_2y + u_3z = v$$

Si v n'est pas un multiple du PGCD de u_1, u_2, u_3, alors l'équation n'a pas de solution. On considère donc que v est multiple du PGCD de u_1, u_2, u_3, soit d. On est alors amené à résoudre une équation :

$$v_1x + v_2y + v_3z = w \text{ où } v_1, v_2, v_3 \text{ sont premiers entre eux(1)}$$

On pose $V = v_2 \wedge v_3$; ainsi $v_2 = V_2 \times V$ et $v_3 = V_3 \times V$. Ainsi :

$$v_2y + v_3z = V(V_2y + V_3z) = V \times Y$$

L'équation (1) est alors équivalente au système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_2y + v_3z & = & V \\ v_1x + VY & = & w \end{array} \right.$$

Ce qui nous amène à la résolution successive de 2 équations à deux inconnues (voir Analyse mathématique).
En posant (x_1, y_1, z_1) une solution particulière de l'équation (1) et (x_0, y_0) une solution de l'équation $V_2y+V_3z = 1$, les solutions de l'équation peuvent ainsi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ -v_1y_0 & v_3 \\ -v_1z_0 & -v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} \text{ où } h, k \in \mathbb{Z}$$

2.4 Trouver le pgcd de n nombres et une solution particulière d'une équation linéaire

On utilise l'algorithme d'Euclide étendu que l'on peut écrire de façon simple.
Rappel
Soit a et b deux nombres dont on cherche le pgcd et les coefficients de Bezout. On peut écrire :

$$\begin{array}{ccc} a = bq_1 + r_1 & \text{ou} & a - bq_1 - r_1 = 0 \\ b = q_2r_1 + r_2 & \text{ou} & b - r_1q_2 - r_2 = 0 \\ r_1 = q_3r_2 + r_3 & \text{ou} & r_1 - q_3r_2 - r_3 = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n & \text{ou} & r_{n-2} - q_nr_{n-1} = r_n \end{array}$$

Pour retrouver les coefficients de Bezout, on « remonte » les calculs, ou, ce qui revient au même, on cherche les coefficients multiplicatifs β_i des équations de droite pour que la somme annule tous les termes sauf, a, b et r_n le pgcd :

$$a\beta_1+b(\beta_1q_1+\beta_2)+r_1(\beta_3-\beta_2q_2-\beta_1)+\cdots+r_{n-2}(\beta_n-\beta n - 1q_{n-1}-\beta_{n-2})+r_{n-1}(-\beta_nq_n-\beta_{n-1}) = r_n\beta_n$$

Il suffit d'annuler toutes les parenthèses sauf les deux premières. D'évidence $\beta_n = 1$, donc, $\beta_{n-1} = -q_n$, donc $\beta_{n-2} = 1 + q_nq_{n-1}$, etc.

Une façon de poser les calculs est alors d'écrire :

$$\begin{array}{cccccccc}
a & b & r_1 & \dots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n \\
0 & -q_1 & -q_2 & \dots & -q_{n-1} & -q_n & \\
\backslash & \backslash & & \dots & \backslash & \backslash & \\
x_0 & y_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & 1=\beta_n
\end{array}$$

par exemple : Soit à trouver la relation de Bezout pour les nombres 7 et 5 :

$$\begin{array}{cccc}
7 & 5 & 2 & 1 \\
 & -1 & -2 & \\
 & -2\times(-1)+1=3 & 1\times(-2)=-2 & 1
\end{array}$$

De ce tableau, on tire que 7 et 5 sont premiers entre eux et que un couple de coefficients de Bezout est $(-2,3)$

L'intérêt n'est bien sûr pas dans cet exemple trivial, mais pour trouver une solution particulière d'une équation diophantienne linéaire, et en particulier pour plus de deux inconnues. Par exemple, soit à résoudre l'équation :

$$42x+30y+15z+14t=1$$

on utilise le tableau :

$$\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
42 & 30 & 12 & 6 & 15 & 6 & 3 & 14 & 3 & 2 & 1 \\
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 04 & 1 & & \\
0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 & -1 & \\
20 & -30 & 20 & -10 & 5 & -10 & 5 & -1 & 5 & -1 & 1
\end{array}$$

Détail des calculs :

$$\begin{array}{l}
-1 = 1\times(-1) \\
5 = (-1)\times(-4)+1 \\
-1 = 5\times 0+(-1) \\
5 = -1\times 0+5 \\
-10 = 5\times(-2) \text{ attention pas d'addition} \\
5 = (-10)\times 0+5 \\
-10 = 5\times 0+(-10) \\
20 = -10\times -2 \\
-30 = 20\times(-1)+(-10) \\
20 = 30\times 0+20
\end{array}$$

2.5 Cas général

Le paragraphe précédent a montré comment trouver une solution particulière d'une équation linéaire diophantienne.

2.5.1 Si deux coefficients au moins sont premiers entre eux

La résolution de l'équation est alors simple :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$$

on pose $a_1 \wedge a_2 = 1$ quitte à changer l'ordre. Alors une solution générale de cette équation est :

$$(ka2 + u(c - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n), -ka_1 + v(c - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n), x_3, x_4 \ldots, x_n)$$

avec u et v les coefficients de Bezout de a_1 et a_2

2.5.2 Si les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble mais pas aucun couple n'est premier entre eux

Exemple : $21x + 14y + 6z = 1$
L'algorithme d'Euclide étendu donne une solution particulière : $(1, -1, -1)$ mais la solution générale ne peut être trouvée qu'en résolvant le système :

$$\begin{cases} 14y + 6z = 2Y(1) \\ 21x + 2Y = 1(2) \end{cases}$$

D'après le rappel en début de ce texte, l'équation (2) a comme ensemble de solutions :

$$(1 + 2k, -10 - 21k), k \in Z$$

et l'équation (1) :

$$(Y + 3h, -2y - 7h), h \in Z$$

Finalement l'équation de départ a comme solution :

$$(1 + 2k, -10 - 21k + 3h, 20 + 42k - 7h), \; h, k \in Z$$

Pour résoudre l'équation générale, dans le cas où aucun couple de coefficients n'est premiers entre eux, on peut ainsi procéder de proche en proche :
Soit à résoudre

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 1$$

On pose

$$X_1 = 1 - \sum_{i=3}^{n} a_ix_i$$

et on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = X_1 \\ X_1 + \sum_{i=3}^{n} a_ix_i = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation a donc $n - 1$ inconnues, on peut donc continuer le processus jusqu'à ce que un système de $n - 1$ équations à deux inconnues.

2.5.3 Un peu d'algèbre linéaire

Une méthode générale de résolution peut être mise en place en utilisant un échelonnage de matrice selon les colonnes.
Exemple :
Soit à résoudre l'équation diophantienne :

$$2x + 3y + 4z + 5t = 1$$

Elle a évidemment des solutions puisque (2, 3, 4, 5) sont premiers dans leur ensemble. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut utiliser la méthode vue plus haut :

$$(2+3x-8y-10z, -1-2x+4y+5z, y, z) \text{ avec } x, y, z \in Z$$

La méthode d'échelonnage consiste à trouver une matrice M échelonnée telle que :

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n).M$$

Dans cet exemple, en jouant sur les combinaisons linéaires et les inversions des colonnes :

$$(2,3,4,5) = (2,3,4,5).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2,1,0,0) = (2,3,4,5).\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,0,0) = (2,3,4,5).\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1,0,0,0) = (2,3,4,5).\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1k + 0l + 0m + 0n = 1$ et donc $k = 1$
Les solutions de l'équation sont alors :

$$1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(2-2l-2m-n,\ -1-n,\ l+m,\ n) \text{ avec } l, m, n \in Z$$

.
Remarque
En résolvant le système :

$$\begin{cases} 3x-8y-10m &= -2l-2m-n \\ 6x+4y+5z &= -n \\ y &= l+m \\ n &= z \end{cases}$$

on voit que les deux solutions sont équivalentes en posant :

$$x = 2l + 2m + 3n, y = l + m, z = n$$

Par exemple, la solution $(-3,\ -2,\ 2,\ 1)$ obtenu en donnant la valeur 1 à l, m et n s'obtient en donnant les valeurs : $x = 7,\ y = 2,\ z = 1$ à la solution $(2+3x-8y-10z, -1-2x+4y+5z, y, z) = (-3,\ -2,\ 2,\ 1)$.