Les fractions Égyptiennes
Analyse mathématique

Équipe DREAM

28 novembre 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Il s'agit de chercher s'il est possible de décomposer l'unité en somme de fractions unitaires. Autrement dit :

- Peut-on trouver deux entiers naturels non nuls distincts a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$?
- Peut-on trouver trois entiers naturels non nuls distincts a, b et c tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$?
- Et avec plus de trois fractions ?

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

2.1 Décomposition de l'unité en somme de deux fractions unitaires

- **Première Démonstration**
  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ est équivalent á $a=\frac{b}{b-1}$.
  Mais a est entier et comme b et $b-1$ sont premiers entre eux puisqu'on peut écrire la relation de Bezout : $b-(b-1)=1$ avec les deux entiers 1 et -1, $b-1$ est une unité et donc $b=2$.
  Ce qui correspond au cas : $a=b=2$, exclu car $a\neq b$.

- **Deuxième Démonstration**
  On peut supposer :
  $$2\leq a\leq b$$
  alors
  $$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}\leq\frac{1}{2}$$
  Par conséquent
  $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$$
  .

- **Troisième Démonstration**
  On considère l'hyperbole d'équation : $y=\frac{1}{x}$, et les deux points de cette hyperbole d'abscisses a et b. La droite qui passe par ces deux points coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Comme $1<a<b$, ce point est au-dessous de 1 quels que soient a et b.

2.2 Décomposition de l'unité en somme de trois fractions unitaires

a, b et c sont non nuls et différents de 1 car $1+1/p+1/q\geq 1$.
$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ est une décomposition de 1 comme somme de deux inverses d'entiers, et on peut décomposer $\frac{1}{2}$ comme somme d'inverses de deux entiers : $\frac{1}{2}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ soit $1=\frac{2}{c}+\frac{2}{d}$, soit $cd=2c+2d$ soit $c(d-2)=2d$ donc :

- Si d et $d-2$ sont premiers entre eux : d divise c et $d=2+\frac{2}{k}$ et comme d est entier, $k=1$ ou $k=2$. Ce qui donne comme solution :
  si $k=1$ alors $d=c=4$;
  si $k=2$ alors $d=3$ et $c=6$.
  On obtient donc les triplets suivants : $(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ et $(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6})$.

- Si d et $d-2$ ne sont pas premiers entre eux : un diviseur commun divise leur différence, c'est à dire 2. Donc 2 divise d et $d-2$ et en posant $d=2r$, il vient : $c=\frac{2r}{r-1}$ et comme r et $r-1$ sont premiers entre eux, $r-1=1$ ou $r-1=2$. Ce qui donne comme solution :
  $d=4$ et $c=4$ ou
  $d=6$ et $c=3$.
  On obtient donc les triplets suivants : $(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ et $(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6})$.

2.3 Décomposition de l'unité en somme de plus de trois fractions unitaires

On peut envisager une génération de solutions d'ordre supérieur de plusieurs facons :

1. Partant d'une décomposition en trois fractions, il suffit de multiplier les dénominateurs par 2 pour obtenir une décomposition de $\frac{1}{2}$ et par suite de 1 :
   $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ donne $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ et par suite $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$.
   De même $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ donne $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ et par suite $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$.
2. Partant de l'identité $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ et de d'une décomposition en somme de trois fractions, on peut obtenir :
   $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ d'oú $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$.
   ou encore
   $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ d'oú $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$.

D'autres questions, plus générales peuvent alors se poser :

- Combien y a-t-il de décompositions différentes à un ordre donné ?
- Existe-t-il des décompositions qui ne sont pas générées par les méthodes précédentes ?