Fractions Égyptiennes
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

- Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?
- Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
- Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Continue…

2 Scénario(s) dans la classe

1. **Scénario 1**
   Le premier scénario proposé ici est celui qui a été mis en œuvre dans un grand nombre de classes. La situation est proposée dans son ensemble en une seule fois. La mise en œuvre est identique à celle d'un problème ouvert.

Les élèves se sont installés par groupe de 4 ou 5 Ils font face au professeur	Le professeur Les élèves	Présente le type d'activité écoutent et prennent connaissance du type d'activité	
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Présente le problème et précise les outils disponibles écoutent et prennent connaissance du problème	Énoncé sur transparent
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Vérifie l'appropriation de la consigne en en demandant une reformulation Un élève reformule sur la demande du professeur. Les autres écoutent	Énoncé sur transparent
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Demande aux élèves de poser toutes les questions qu'ils veulent sur cet énoncé. Gère des débats permettant de répondre à des questions du type : Qu'est-ce qu'un entier naturel ? Que veut dire $\frac{1}{a}$? Posent éventuellementdes questions puis débattent	Énoncé sur transparent
Les élèves sont en groupe de travail	Le professeur Les élèves	Donne le départ de la recherche Débutent la recherche	Papier Crayon Calculatrice ?
Les élèves sont en groupe de travail	Le professeur Les élèves	Reste à distance puis circule pour prendre de l'information sans intervenir lorsque les élèves sont absorbés par leur recherche cherchent	Papier Crayon ; Calculatrice ?

Dans certaines classes on pourra faire, si nécessaire, une première mise en commun après environ 10 à 15 minutes de recherche. Cette mise en commun aura pour but de faire le point sur les premières approches du premier cas qui est délicat ($\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$) et donc de relancer par un débat une recherche qui s'enlise.

Dans d'autres classes, une prise d'information par le professeur circulant dans les rangs en début de recherche devrait suffire pour vérifier que l'étude de ce cas ne bloque pas l'avancée des travaux.

Suivant les niveaux de classe et l'approfondissement attendu, la recherche se prolongera plus ou moins. Une première mise en commun, à partir de productions d'élève sur transparents ou affiches, ou directement lors d'un débat doit se dérouler en fin de première séance. Elle permet de faire le point rapidement sur les résultats obtenus (ou sur une partie seulement) en vue d'un développement lors de la deuxième séquence.

Le professeur recueille les productions qu'il va pouvoir analyser entre les deux séances. On peut utilement demander à chaque élève de rédiger un compte rendu personnel de recherche pour la prochaine séance.

Lors de celle-ci, les élèves reforment les groupes pour échanger, confronter leurs écrits et se replonger dans la situation. En s'appuyant sur les productions des élèves, le professeur prolonge le débat et met en avant les résultats, propriétés ... qu'il souhaite mettre en évidence ou institutionnaliser.

Remarque : une mise en œuvre lors de deux heures consécutives est plus simple et plus confortable pour l'enseignant avec éventuellement une pause entre les deux heures.

2. **Scénario 2**
Le deuxième scénario proposé est celui qui a été mis en œuvre dans la classe de quatrième d'un professeur-stagiaire. Ce scénario a la particularité de scinder en trois la situation. Le texte proposé est celui de l'enseignant stagiaire. Les conséquences des choix sont analysées dans la partie compte rendu du document.

Première période de travail :

« Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$? »

Première phase : appropriation du problème

Cette première phase du problème doit permettre à tous les élèves de comprendre le but du problème afin que tous puissent entrer dans la recherche.

Consigne : lisez attentivement l'énoncé de la question. Posez toutes les questions que vous souhaitez sur cet énoncé afin que vous soyez surs de bien avoir compris.

Déroulement prévu : les élèves travaillent ici individuellement. Plusieurs questions risquent de ressortir. Que signifie « entiers naturels », que signifie « distincts » ? Ces questions seront réglées par la classe. En effet nous avons déjá rencontré ces différents termes depuis le début de l'année.

Deuxième phase : recherche des solutions.

Cette phase donne le départ de la recherche. L'objectif de cette phase de travail est que les élèves arrivent à leurs propres solutions après s'être mis d'accord à l'intérieur du groupe.

Consigne : lancez vous dans la recherche. Vous avez le droit d'utiliser vos calculatrices. Toutes les pistes de réflexion peuvent être explorées. Vous pouvez comparer vos résultats et en discuter à l'intérieur de votre groupe de travail. Vous devez aussi écrire sur un transparent l'avancée de vos recherches. Cependant ce bilan doit être accepté par l'ensemble des membres du groupe. A vous de convaincre vos camarades du bien fondé de vos arguments. écoutez-vous ! Travaillez en équipe !

Déroulement prévu : le travail se fait en groupe. La calculatrice est autorisée. Mon rôle dans cette phase de recherche sera de remobiliser les élèves lorsqu'ils commenceront Ã se décourager et de recentrer leur recherche en leur demandant d'aller au bout de leur idée. Je devrai aussi repérer les erreurs afin de prévoir l'ordre dans lequel je ferai passer les différents groupes pour le bilan de la phase suivante.

Troisième phase : mise en commun et débat sur les solutions proposées

Objectif : confronter les résultats de recherche des différents groupes. Les élèves doivent être capable d'écouter leurs camarades, de convaincre la classe.

Consigne : le professeur envoie un élève de quelques groupes présenter le travail de recherche au rétro projecteur. Le débat est lancé : que pensez vous des résultats proposés ? Peut-on améliorer le raisonnement ? Pourquoi cela vous semble faux ?

Déroulement prévu : j'aurai choisi auparavant l'ordre dans lequel je vais faire exposer les différents groupes. Pour cela il est important de repérer, pendant la phase de recherche, les différentes erreurs. Je ferai passer en dernier les groupes qui n'ont pas trouvé de solution en leur demandant brièvement pourquoi ils en sont arrivés là, histoire de voir si cette absence de solution provient d'un raisonnement ou d'un manque de travail.

Quatrième phase : validation

Objectif : l'objectif ici n'est pas de faire une preuve mathématique que le problème proposé n'a pas de solution mais plutôt d'essayer de faire en sorte que tous les élèves soient convaincus de ce fait.

Consigne : essayez de voir pourquoi la conjecture que l'on vient de faire est vraie. Quels arguments peut on avancer pour aller dans ce sens là ?

Déroulement prévu : le travail est fait en groupe. En partant du fait que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction du segment $[0; 1]$ différente de 1, les élèves se rendront compte qu'ils ne peuvent pas remplacer le deuxième $\frac{1}{2}$ par une autre fraction qui convienne.

Deuxième période de travail :

« Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1\,?$$ »

Je vais utiliser ici le même scénario que lors de la première période de travail. Lors de la phase de recherche, les élèves vont se servir de la calculatrice afin d'arriver Ã une solution par « âtonnement ».
Certains élèves seront plus organisés que d'autres. Ils vont alors donner une valeur à a, puis essayer différentes valeurs pour b et c, puis changeront la valeur de a avant de réessayer différentes valeurs pour b et c et ainsi de suite ! D'autres élèves fixeront peut être les valeurs de deux variables et feront varier la troisième.
Cependant dans la phase de validation, je demanderai aux élèves d'essayer de trouver une autre solution. Là encore je n'attends pas une preuve mathématique de l'unicité de la solution.
Par contre je demanderai pourquoi la solution trouvée convient. J'attends alors des élèves qu'ils calculent la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Un calcul Ã la main s'impose ici afin d'avoir un résultat exact. En effet la calculatrice ne donne qu'un résultat approché pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$.

Troisième période de travail :

« Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b, c et d tels que :

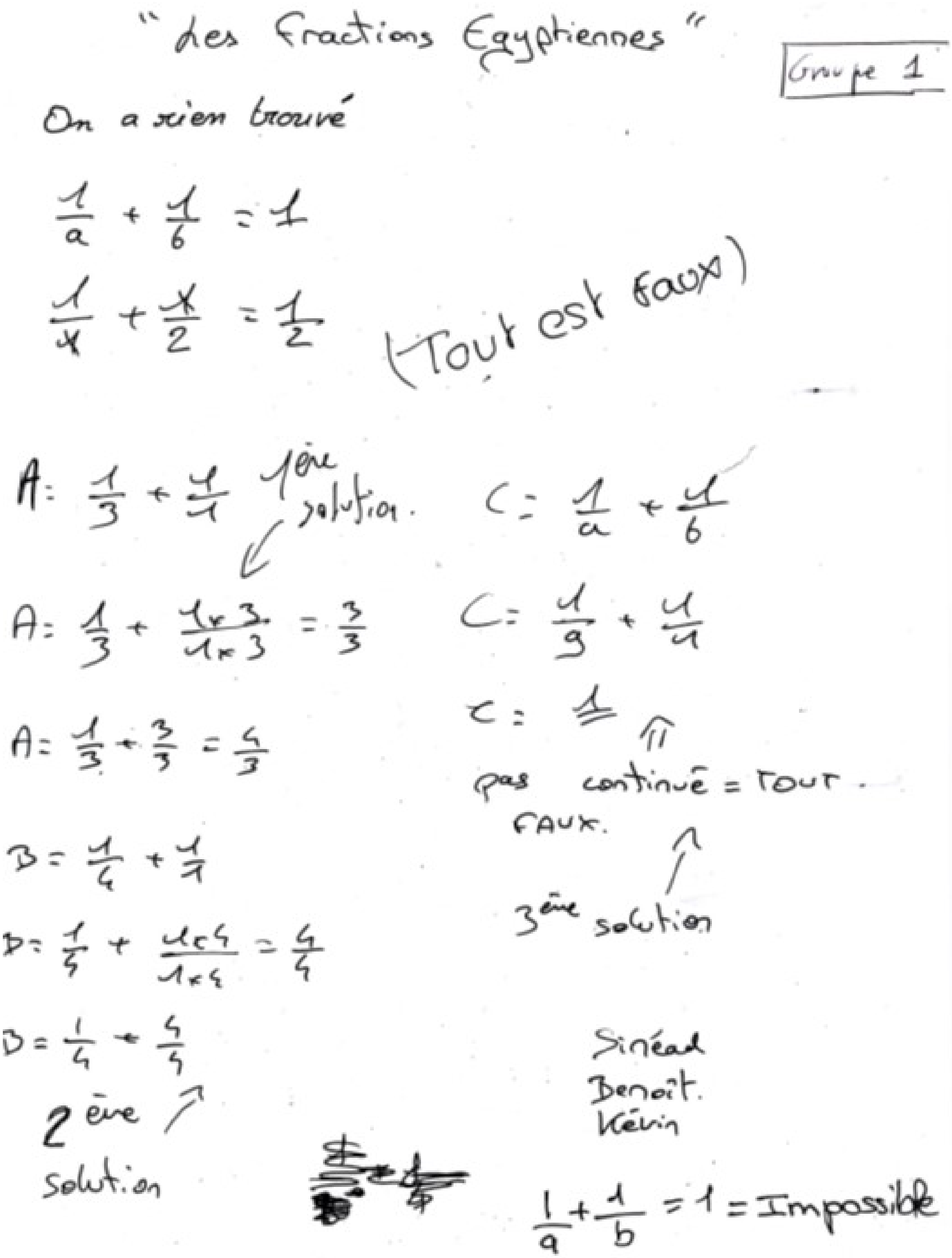
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1\,?\text{ »}$$

Cette période de travail est ici dans un esprit de différenciation : les élèves plus rapides devront commencer une recherche de solution.
Si certains élèves ont le temps d'arriver jusque là, j'envisage de leur faire continuer la recherche Ã la maison mais ceci seulement pour les volontaires.
Là encore les élèves vont sans doute « se jeter » sur la machine Ã calculer et essayer d'arriver sur une solution par tâtonnement.
D'autres au contraire vont peut être partir de la solution trouvée lors de l'étape précédente et réfléchir à partir de celle ci.

3 Production(s) d'élève(s)

3.1 Élèves de Quatrième

Voici quelques affiches rédigées par des élèves de quatrième après leur recherche du problème. Le scénario a été décrit dans la section précédente et un compte-rendu de l'enseignant se trouve dans la section suivante.



"Les fractions Egyptiennes"

Groupe 1

On a rien trouvé

$\frac{1}{a} + \frac{1}{6} = 1$

$\frac{1}{4} + \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$

(Tout est faux)

$A : \frac{1}{3} + \frac{1}{1}$ 1ère solution.

$A : \frac{1}{3} + \frac{1 \times 3}{1 \times 3} = \frac{3}{3}$

$A : \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$

$B = \frac{1}{4} + \frac{1}{1}$

$B = \frac{1}{4} + \frac{1 \times 4}{1 \times 4} = \frac{4}{4}$

$B = \frac{1}{4} + \frac{4}{4}$

2ème solution

$C : \frac{1}{a} + \frac{1}{6}$

$C : \frac{1}{9} + \frac{1}{1}$

$C : \frac{1}{}$

pas continué = tout faux.

3ème solution

Sinéad
Benoit.
Kévin

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 =$ Impossible

groupe 2

Les Fractions Egyptienne.

Question 1 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{1{,}999\ldots} = 1$

Question 2 : c'est IMPOSSIBLE ← Faux

IMP

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Pas vrai

c'est arrondis.

$\boxed{\text{IMPOSSIBLE}}$

groupe 3

Question 1

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1\,ab$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1\,x + x^2 = 1\,x^3$

Mais on n'est vraiment pas sure.
$x + x^2 = x^3$
car a et b est differents.

$1 \times 10^{-16} + 1 \div 1 = 1$
$1 \times 10^{-8} + 10^{-8} + 1 \div 1 = 1{,}00000002$

"Les fractions Egyptiennes"

groupe 4

1ère question :

$$\frac{1}{9^{12}} + \frac{1}{1} = 1$$

On a arrondi, car on ne peux pas trouver la solution sans arrondie.

2ème solution :

$1 \div 1000000000000000000 + 1 \div 1$

2ème QUESTION

IMPOSSIBLE

groupe 5

Recherche :

Solution 1 : $\frac{1}{0} + \frac{1}{1} = 1$

Solution 2 : $\frac{1}{\text{infinie}} + \frac{1}{1} \simeq 1$

Recherche 2 :

Solution 1 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \simeq 0{,}999999\ldots$

Solution 2 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Solution !

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

1) impossible

groupe 6

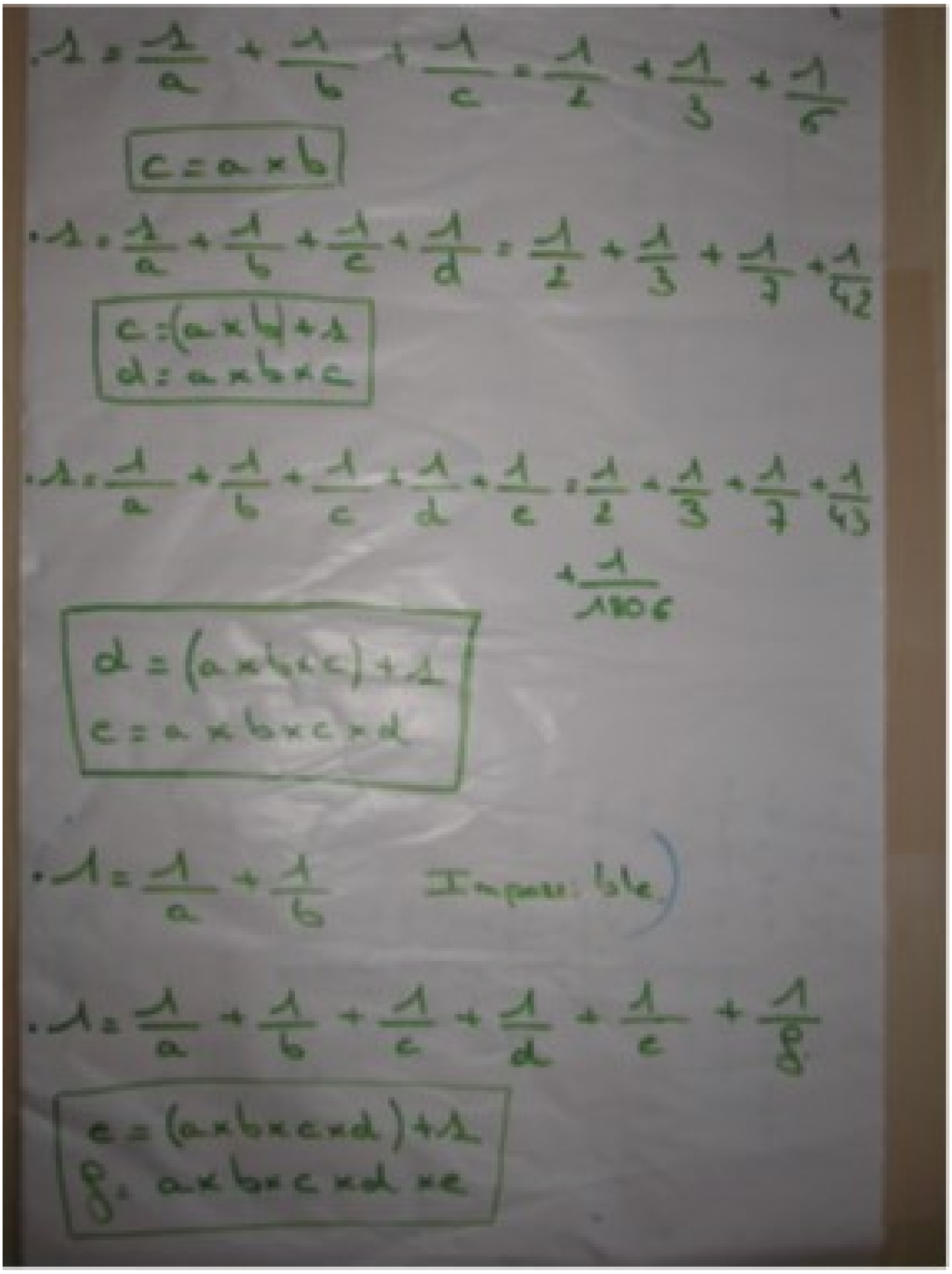
2) possible car :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$

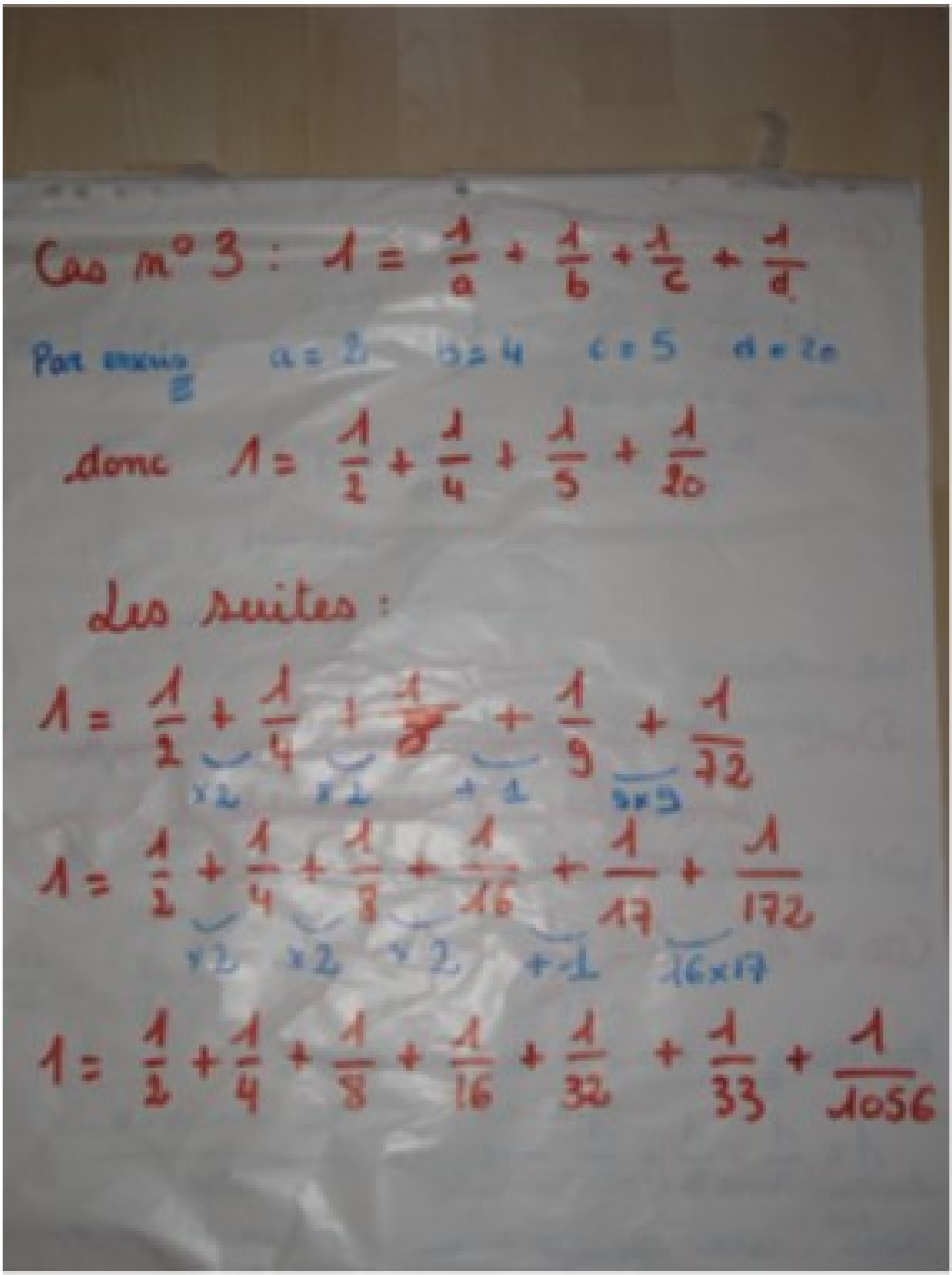
3.2 Étudiant préparant le CRPE

Voici quelques affiches rédigées par des étudiants préparant e concours de professeur des écoles (CRPE) après leur recherche du problème. Un compte-rendu se trouve dans la section suivante.

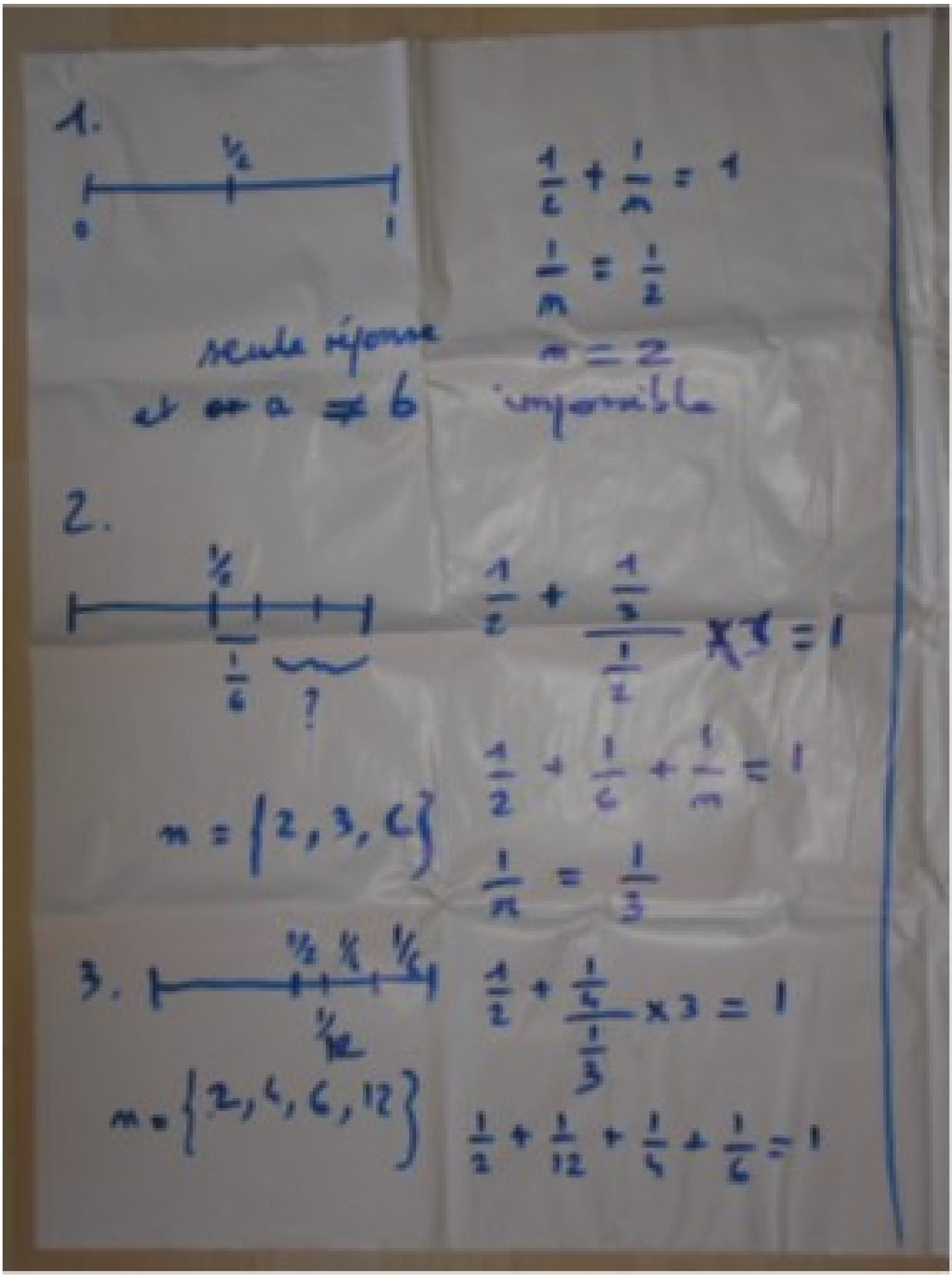
Affiche 1



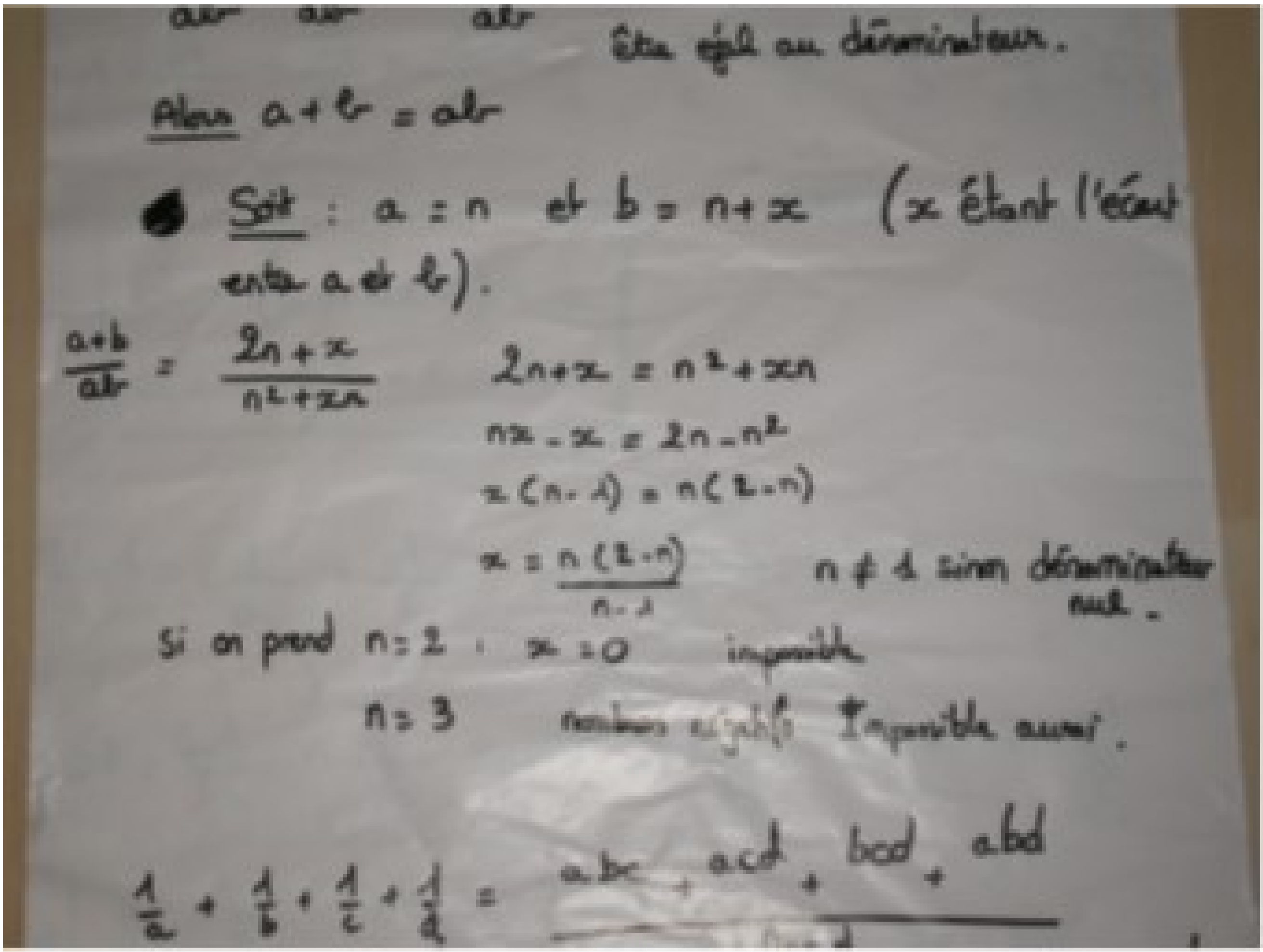
Affiche 2


Cas n° 3 : 1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d
a = 2 b = 4 c = 5 d = 20
donc 1 = 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/20
Les suites :
1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/9 + 1/72
×2 ×2 +1 8×9
1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/17 + 1/272
×2 ×2 ×2 +1 16×17
1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/33 + 1/1056

Affiche 3


1.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=1$
$\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$
$n=2$
impossible
seule réponse
2.
$n=\{2,3,6\}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{n}=1$
$\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$
3.
$n=\{2,4,6,12\}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$

Affiche 4


être égal au dénominateur.
Alors a + b = ab
Soit : a = n et b = n + x (x étant l'écart entre a et b).
$\frac{a+b}{ab} = \frac{2n+x}{n^2+xn}$
$2n + x = n^2 + xn$
$nx - x = 2n - n^2$
$x(n-1) = n(2-n)$
$x = \frac{n(2-n)}{n-1}$
n ≠ 1 sinon dénominateur nul.
Si on prend n = 2 : x = 0 impossible
n = 3 nombres négatifs impossible aussi.
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} =$ abc + acd + bcd + abd

4 Comptes rendus (de l'enseignant)

4.1 Élèves de Première S

La situation a été ménée sur deux heures, non consécutives, et sur les horaires de T.D. (demi-groupes). Dans la premìre moitié de classe se sont constitués 4 groupes et dans la deuxìme moitié 3 groupes.

Première heure :
Distribution de l'énoncé : pas de consigne spéciale concernant l'usage des calculatrices (ce sera à la demande).

Travail de groupe : 10 minutes avant la fin, distribution d'un transparent pour les conclusions dans chaque groupe.

Remarque : Si un groupe bute sur la question 1, on pourra lui dire de passer à la question 2 (selon les cas...).

Seconde heure : résumé des comptes rendus, correction des erreurs et quelques pistes de solutions.

Quelques traces des productions de élèves

Groupe 1

Équation : $a + b = ab$, donc impossible car distincts.

Avec les fractions égyptiennes : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, puis : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; donc : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, puis : $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ donc : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1$.

Plusieurs solutions à la calculatrice dont : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{486} + \frac{1}{936} = 1$.

Groupe 2

Différentes résolutions algébriques de la question 1 : $a + b = ab$; $a = \frac{b}{b-1}$, $b = \frac{a}{a-1}$, puis par substitution : $0 = 0$ ou $1 = 1$. Mais qu'est ce que cela signifie ?
Beaucoup de discussions autour de cette question

Réduction au même dénominateur : $\frac{a+b+c}{abc} = 1$.

Retour sur la question 1, la multiplication est plus grande que la somme, mais : $1 + 3 > 1 \times 3$?

Groupe 3

Résolution pour arriver à : $a = \frac{b-1}{2}$ et $b = \frac{a-1}{2}$ puis par substitution on trouve : $1 = 1$. C'est vrai donc il y a une solution.

C'est un algorithme il faut donc faire la première question.

Á la calculatrice avec des valeurs approchées : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ mais n'y a-t-il pas une décimale plus loin ?

Essais avec : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ... mais plus a est grand plus on s'éloigne de 1.

Groupe 4

Calcul algébrique pour arriver à : $1=0$ donc c'est faux.

Réduction pour arriver à : $a+b=ab$, mais : $3+4<3\times 4$.

Essais avec des nombres mais aucun résultat sans nombres distincts.

Un élève à dessiné l'hyperbole représentant $x\mapsto \frac{1}{x}$ sans savoir qu'en faire.

Groupe 5

Réduction pour arriver à : $a+b=ab$. Pas de solution ... si car on le demande

Calcul algébrique : $a+b-ab=a(\sqrt{b}+\sqrt{ab})(\sqrt{b}-\sqrt{ab})=0$ donc : $a=0$, $\sqrt{a}=1$, $\sqrt{b}=0$, donc impossible.

Réduction au même dénominateur avec 3 fractions :
$a+b+c=abc$, ou bien, $ab+ac+cb=abc$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...<1$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ puis on divise par 2 et on ajoute : $\frac{1}{2}$
ce qui donne : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$.

Groupe 6

Résolution : $a+b=ab$, puis : $\frac{b}{ab}=1-\frac{a}{ab}$ d'où : $b=1-\frac{a}{ab}\times ab$, et alors : $b=1-a$; donc : $a+b=1=ab$, qui est impossible. Car alors : $a=b=1$ or ils sont distincts.

Réflexion sur la question : Peux-tu trouver ? et Trouver ?

Pour 3 fractions trop compliqué pour réduire.

Groupe 7

Réduction : $a+b=ab$ impossible car : $ab>a+b$

Plusieurs solutions : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=1$

Raisonnement : si $a=1$ alors : $\frac{1}{b}=0$ ce qui est impossible ;
si $a=2$ alors $b=2$ impossible, si $a=3$ alors $\frac{1}{b}=\frac{2}{3}$ trop petit.

A partir de 3 fractions on divise par 2 puis on rajoute : $\frac{1}{2}$

Autres solutions : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=1$

4.2 Élèves de Quatrième

Plusieurs expérimentations ont eu lieu en quatrième. Celle qui est présentée ci-dessous à la particularité comme annoncé précédemment de présenter un scénario différent, dans la mesure où l'énoncé a été coupé en trois.

Cette séance a été expérimentée le 26 janvier 2007 dans le cadre d'une activité de formation intitulée « objet d'évaluation » de la deuxiéme année d'IUFM (i.e. ESPE) pour les professeurs de collège et de lycée. Il s'agit pour ces professeurs stagiaires de produire un document écrit, montrant la capacité du professeur stagiaire à décrire et à analyser sa pratique professionnelle dans une situation de classe effective.

Dans ce cadre, le groupe DREAM a donc proposé au professeur stagiaire de travailler à partir d'une synthèse que nous avions rédigé pour présenter le problème des fractions égyptiennes de fa çon succincte, en espérant que le lecteur puisse facilement s'approprier la situation mathématique et la description didactique. Nous avons remis cette synthèse en main propre au professeur stagiaire sans entrer dans le détail du texte, de façon à tester ce document en tant que ressource pour le professeur.

Quelques remarques s'imposent ici :
Le professeur stagiaire n'avait jamais mis en œuvre une telle séance, ceci pouvait laisser penser que le texte proposé pouvait avoir une influence plus forte sur le scénario proposé. Or le professeur stagiaire s'est rapidement écarté de la proposition de scénario et des « conseils » donnés en coupant l'énoncé initial en trois (un premier temps étant consacré exclusivement à la recherche de deux entiers distincts a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$). L'argument donné par le professeur stagiaire est la plus grande facilité *a priori* de gestion de la séquence. Nous verrons plus loin l'influence d'un tel choix.

Le professeur stagiaire a formé 6 groupes. Il a ensuite rappelé les conditions de travail (travail en groupe, travail de recherche) puis a posé sur le rétroprojecteur le transparent sur lequel est inscrit :

> Les fractions égyptiennes
> Première question :
> Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que
> $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

Le professeur stagiaire a lancé le travail individuel sans demander de relecture ou reformulation. A surgi rapidement une question sur la notion d'entiers naturels distincts. Le professeur stagiaire a expliqué et reformulé (lui-même) puis « Allez » ... Il a redonné les consignes et précisé « vous avez le droit d'utiliser la calculatrice, votre cours sur les fractions » ... « un résultat en mathématique doit-être, si ce n'est démontré, prouvé... vous devez pouvoir expliquer ce qui vous a amené au résultat ».

Voici une partie du compte rendu du stagiaire :

8h40 : les éléves ont pris leur cahier de brouillon

J'ai choisi de présenter les deux questions aux élèves de manière séparée. J'ai donc commencé par projeter la première au rétroprojecteur.

Deux groupes ont essayé de structurer leur recherche en fixant la valeur 1 au nombre a, puis on fait varier b. Sans résultat acceptable, ils ont alors fixé $b = 2$ puis on fait varier b. La solution $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ est alors assez vite sortie.

Les autres groupes se sont lancés dans des essais successifs à la machine é calculer. La solution $a = 1$ et $b = 0$ est apparue dans tous les groupes.

Certains élèves se sont alors aperçus de la « décroissance de $x \to \frac{1}{x}$ » : « si on fait augmenter a, alors $\frac{1}{a}$ va diminuer ». Des solutions du style $a = 1$ et $b = 10000000000000$ sont alors sorties. La solution $\frac{1}{1} + \frac{1}{infini} \approx 1$ a même été écrite par un groupe.

Dans un autre groupe la solution $\frac{1}{2} + \frac{1}{1,999999999}$ est trouvée puis claironnée. Cette « solution » diffuse dans la classe.

8h57 : le professeur stagiaire arréte le temps de recherche et passe au bilan.

Nous sommes ensuite passés au bilan en classe entière. J'ai demandé au groupe 5 de venir présenter sa solution (1 ;0). Celle-ci a vite été invalidée par la classe. En effet nous avions vu lors du chapitre sur les fractions que la division par 0 est interdite.

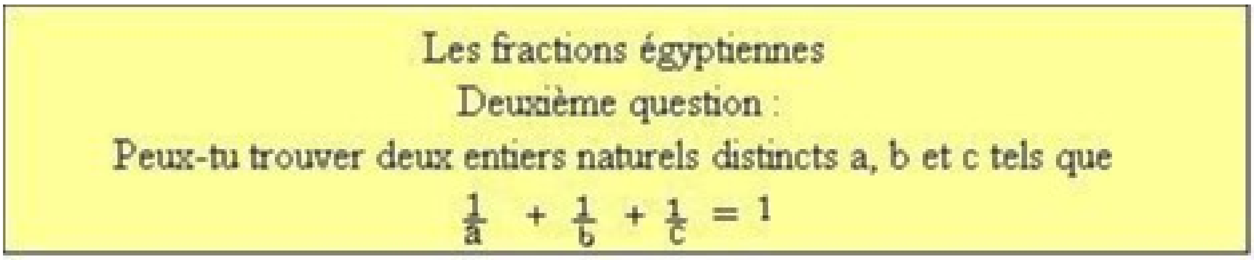
Le groupe suivant est venu nous présenter la solution (1 ;1000000000)

Il m'a alors semblé important de faire remarquer que a ne pouvait pas être égal à un. Nous avons noté que $\frac{1}{1} = 1$ et qu'en ajoutant un nombre positif à 1, le résultat serait forcement supérieur à 1. Ceci a, me semble-t-il, convaincu la majorité des élèves que a ne pouvait pas être égal é 1.

Un troisième groupe a exposé la solution (2 ;2). Celle-ci a rapidement été invalidée par la classe. Certains groupes ont alors fait en sorte que a et b soient distincts, mais là encore ont oublié la consigne « b est un entier naturel ». Des valeurs telle que 1,9999999 sont apparues. En effet la calculatrice donne un résultat égal à 1 pour $b = 1,999999999999999$.

Là encore, il a fallu rappeler la consigne de départ. Nous en sommes alors arrivés au constat que nous n'avions pas trouvé de solutions.

9h05 : le professeur, sans autre transition, propose le deuxième énoncé :



Un élève du groupe 2 dit tout fort : « Impossible ». Cette intervention à haute voix, conforte sans doute les impressions des camarades qui sont nombreux à émettre eux aussi un avis dans ce sens. La relance de la recherche est donc difficile.

Remarque : *La transition faite ici est inadéquate, et on retrouve bien ici la difficulté relevée dans l'analyse des scénarios. Le fait de proposer cet énoncé partiel amène certaines réactions des élèves et impose une gestion fine. La suite de ce CR va confirmer ces propos.*

Extrait de la suite du compte rendu du stagiaire :
J'ai ensuite projeté la deuxième question. Le départ de la recherche a été difficile pour la plupart des élèves. En effet, nous n'avons pas trouvé de solution à la première question, la deuxième étant plus compliquée, « il est évident que celle si n'aura pas de solution non plus ». Cependant les groupes 2, 5 et 6 se sont lancés dans une recherche par essais successifs. Afin de mobiliser les 3 autres groupes, j'aurai peut-être dé me servir plus vite du travail intéressant du groupe 5 pour montrer que des recherches étaient possibles.

Un premier triplet (3, 3, 3) a été donné par le groupe 5. Le triplet (2, 4, 4) est aussi sorti dans 2 groupes. Ensuite le triplet solution (2, 3, 6) est sorti seulement dans 3 groupes sur 6 (groupes 2, 5 et 6). Un groupe l'a écarté en remarquant à l'aide de la calculatrice que $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$ sont des nombres « qui ne se terminent pas » donc qu'en les ajoutant on « ne peut pas tomber sur un nombre qui se termine ».

Un groupe a lui proposé une validation grâce du calcul fractionnaire. Nous sommes alors passés au bilan en classe entière.

J'ai fait passer les groupes au tableau dans un ordre bien précis afin de commencer par faire invalider la solution (3, 3, 3) puis la solution (2, 4, 4). La classe a compris pourquoi ces solutions ont été écartées. J'ai enfin fait passer un représentant du groupe 5 qui a proposé la solution (2, 3, 6) ainsi que la preuve que ce triplet répond é la question. Les élèves n'ont pas cherché à savoir si cette solution est unique. La fin de la séance approchant, nous nous sommes arrêtés là.

Analyse succincte par le professeur stagiaire de la seconde séance
J'ai proposé aux élèves de revenir sur certains résultats mis en évidence le vendredi. Nous avons tout d'abord rappelé un résultat important vu dans le chapitre sur les nombres relatifs : la division par 0 est interdite ! Pour cela nous sommes revenus à la définition du quotient de deux nombresé : le quotient de a par b est le nombre x qui vérifie $bx = a$. dans cette écriture si $b = 0$ et si a est non nul alors il n'existe pas de x vérifiant cette égalité. Nous sommes ensuite revenus sur le fait que la somme de deux fractions peut étre un entier méme si la calculatrice ne donne, pour le calcul de ces deux fractions, qu'un résultat approché. Nous avons alors travaillé sur le fait que $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ alors qu'à la calculatrice nous n'avons pas de valeur exact pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. J'ai enfin voulu exploiter le résultat trouvé par une élève du groupe 3 qui a mis en place la

décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Conclusion du professeur stagiaire :

- 78 % des élèves sont entrés dans la 1ere question du problème. Ils se sont bien investis dans la recherche.

- Certaines solutions ont été étonnantes pour des élèves de quatrième.

- Seuls 8 élèves sur 22 se sont lancés d'eux même dans la question 2. Ceci vient sans doute du fait que j'ai voulu scinder le problème en 2 questions distinctes. En effet, les él eves ont eu l'impression de devoir recommencer la même recherche alors que nous venions de dire très clairement que la 1ere question n'avait pas de solution. ! La deuxième période de travail n'avait alors plus les caractéristiques d'un problème ouvert. La meilleure solution est sans doute de donner le problème en entier et de ne faire un bilan qu'à la fin de la séance.

- L'objectif de départ qui était de faire chercher les élèves et de réinvestir le travail effectué sur les nombres relatif et le calcul en écriture fractionnaire a néanmoins été atteint.

4.3 Élèves de Seconde

L'expérimentation du 15 juin 2006 est la première des expérimentations en classe de seconde, destinée à recueillir des premiers indices sur les potentialités des problèmes à ce niveau et à baliser les chemins pour les expérimentations fondatrices.

Quelques remarques :
Les élèves ne sont pas spécialement préparés à ce travail sous l'œil de la caméra. Ce ne sont pas des élèves repérés comme scientifiques sauf deux ou trois. La séance est mise en œuvre un lundi de 14h50 à 15h45.

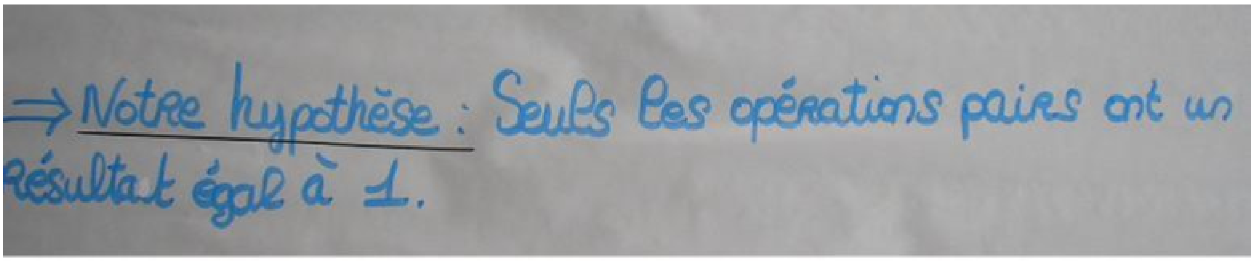
Les élèves rentrent, se placent, on obtient 4 groupes de 4 élèves.

14h55 : L'énoncé est projeté au tableau, un élève le relit, un autre reformule en explicitant ce qu'il faut faire. Les élèves n'ont pas encore l'énoncé sous les yeux. Il semble que le problème soit bien compris mais des questions surgissent :
a peut-il être négatif ?
a peut-il être égal à zéro ?
Un peu plus tard apparaîtra la question « que vaut $\frac{1}{0}$? » 0 ? Des élèves s'exprimeront sans aller au bout de la question.

15 h 04 : début de la recherche individuelle
10 min de recherche : deux ou trois élèves se lancent dans des calculs en utilisant leur calculatrice.

10 minutes plus tard, début du travail en groupe :
Deux groupes (2 et 3) comprenant les élèves qui avaient utilisé leur calculatrice sont assez actifs et produisent des solutions. Le groupe (3) trouve une solution au premier cas en énonçant : « $1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ convient puisque $\frac{1}{0}$ ça ne fait rien et donc $\frac{1}{1}$ + rien cela fait bien 1 ». Ceci fera

l'objet d'un débat ultérieurement.
Le groupe 3 travaille ensuite sur une liste d'écritures décimales. Il obtient la solution (2 ; 4 ; 5 ; 20) pour la somme à 4 termes plus une conjecture :
« on n'obtient de solutions que pour les équations dont le terme de droite est une somme d'un nombre pair de termes ».



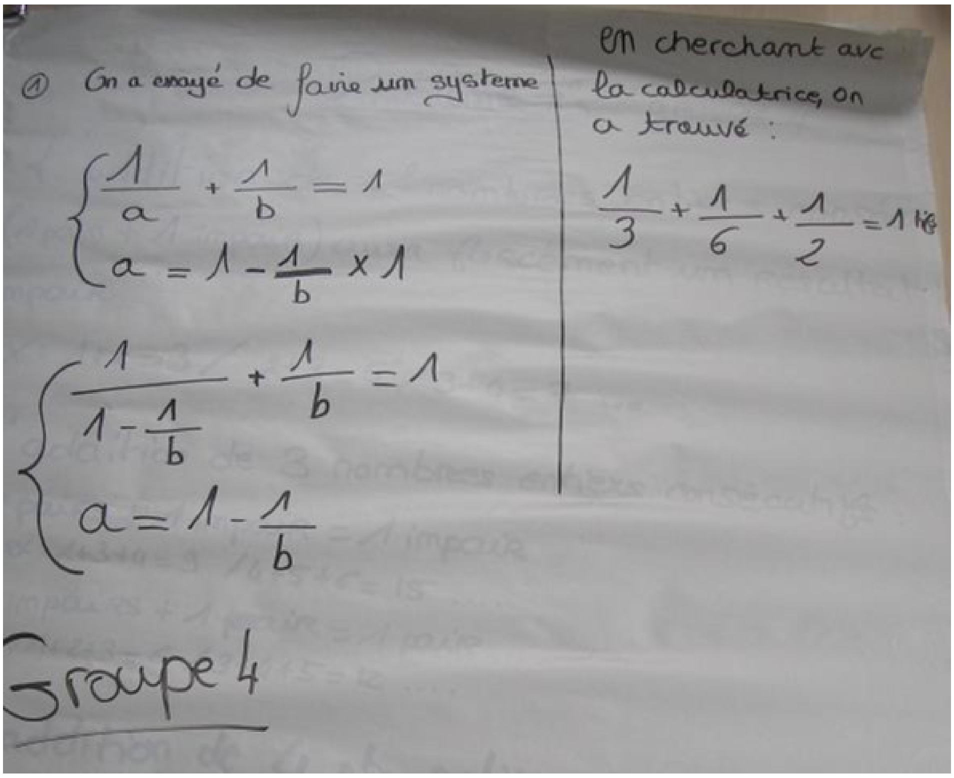
Le contre-exemple du groupe 4 invalidera cette conjecture lors du débat.

Le groupe 2 obtient la solution (3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 20) pour la somme à 5 termes.

Deux groupes (1 et 4) orientés sur du calcul littéral produisent peu.

Le groupe 1 aboutit finalement à l'égalité $ab = a + b$ mais seuls deux éléments du groupe ont amené ce résultat.

Le groupe 4 se lance dans la résolution d'un système dont le traitement n'aboutit pas.



En fin de recherche (peut-Ãªtre influencé par les autres groupes) ils obtiennent
« en cherchant à la calculatrice » $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$.

Remarques à chaud :
Ce problème n'est pas gérable en une heure avec une classe de seconde. Le temps imparti ici permet à peine une mise en commun et pas de validation ni d'institutionnalisation.

Le cas $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, comme l'avait montré l'analyse *a priori*, pose problème et bloque certains groupes.

Deux groupes se lancent dans le calcul littéral et en une heure ne sont pas aussi productifs que l'on pouvaient l'espérer bien que de « bons » élèves y soient intégrés. Est-ce une difficulté spécifique à prendre en considération en seconde ?

Le débat qui s'instaure en fin d'heure semble prometteur. Il confirme l'intérêt du problème et la nécessité d'au moins deux heures et d'une relance à construire en fonction des productions.

4.4 Étudiants préparant le CRPE

Nous présentons ici quelques commentaires relatifs à des séances menées avec des étudiants préparant le concours de professeurs des écoles.

Sauf pour quelques étudiants qui ont eu parcours scientifique depuis le bac, ils n'ont, pour la plupart, pas fait de mathématiques depuis 3 ou 4 ans, voire beaucoup plus pour certains bénéficiant du dispositif d'aide à la reconversion. Toutefois, il y a toujours dans ces groupes des étudiants ayant une certaine familiarité avec le calcul littéral.

Les obstacles déjà anticipés s'avèrent redoutables pour ces publics. Relatons brièvement les faits marquants relevés durant ces séances.

- De très nombreux étudiants s'engagent dans des essais de preuve utilisant le calcul algébrique ... en général sans succès. Il arrive que, malgré des questions parfois insistantes concernant les essais possibles avec trois termes, rien ne sorte. Il est parfois nécessaire de faire le point avec eux durant la recherche. Par exemple : « il semble que pour deux termes il n'y ait pas de solution ... on peut éventuellement passer à la suite ... ».
- Si ceci ne débloque pas la situation, il peut être nécessaire, compte tenu du temps imparti, d'affirmer qu'il y a une solution pour trois termes et de leur demander de la chercher.
- Pour un des groupes ceci a permis en 10 secondes de trouver le triplet et de relancer la recherche pour aboutir à des affiches particulièrement riches mais non finalisées par manque de temps (cf. partie *productions* ci-dessus).

Deux remarques avec ce type de public :
Puisque la situation (cas $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$) et le type de public génère un blocage sur des démarches algébriques, il semble nécessaire d'inciter à l'usage de la calculatrice, par exemple en disant : « vous pouvez avoir une calculatrice » ou même en distribuant au moins une calculatrice par groupe.

Les impasses en algèbre montrent que le numérique ne doit pas être péjoré. Avec l'algèbre on ne résout pas tout. C'est donc un des intérêts de cette situation et de celles des entiers consécutifs au delà des difficultés de gestion. Il est possible de montrer à ce public que ce qui est puissant dans l'algèbre ce sont les retours vers le numérique, que ce dernier peut donner des informations.