Intersection inaccessible
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

27 mars 2021

Table des matières

1 Énoncé du problème

(d) et (d') sont des droites qui ne se coupent pas sur la feuille

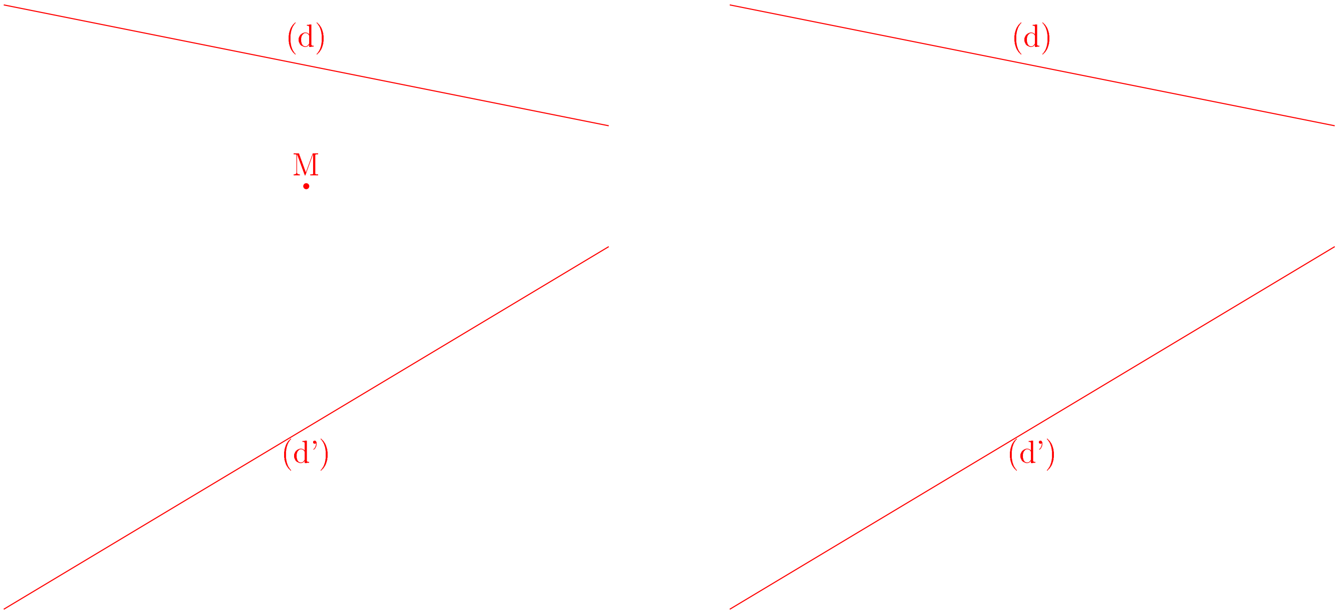

Figure 1: Peux-tu tracer la droite passant par le point M et par le point O intersection de (d) et (d') ? Peux-tu déterminer l'angle des deux droites ?

2 Ouvertures mathématiques

Ce problème s'inscrit dans une classe de problèmes dit de mesures inaccessibles. Ce sont des problèmes qui ont largement été étudiés dans l'histoire des mathématiques, dans le cadre de la mesure de bâtiments ou de distances rendus inaccessibles par des obstacles comme par exemple dans le cas de la navigation côtière. Nous donnons ici quelques exemples de telles mesures.

2.1 Navigation côtière

Ce texte s'inspire d'une fiche produite par "Galion" dans la série "Galion thèmes".
La navigation côtière ou navigation en vue de terre utilise des repères sur la côte pour déterminer la position du bateau ainsi que sa vitesse. Les mathématiques utilisées reposent essentiellement sur les relations trigonométriques : mesure des angles, détermination de la longueur d'un côté d'un triangle, rapports de longueur, etc.

Un peu de vocabulaire

On appelle *amer* un point fixe repéré sur une carte et visible du large : ce peut être un phare, le clocher d'un village, une balise, etc.
Lorsqu'un bateau se trouve en un certain point A, le *relèvement* de l'amer B est l'angle orienté dans le sens inverse du sens trigonométrique $\widehat{NAB}$ où N représente la direction du nord géographique (fig. 3)
Déterminer le relèvement d'un point par rapport à un amer est « relever l'amer ».

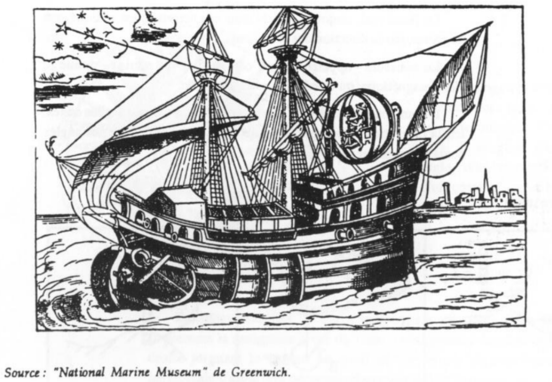

Figure 2: Le Galion symbole du groupe Galion (les gars de Lyon)

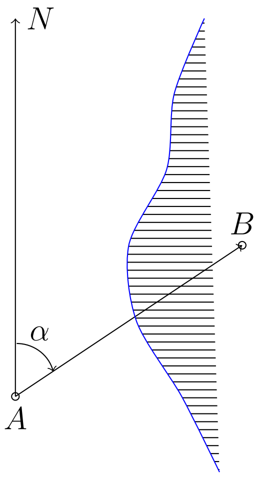

Figure 3: α : relèvement du phare B

La boussole donne le nord magnétique. Il faut alors trouver le nord géographique grâce aux cartes. La différence s'appelle la variation.
La route est le trajet rectiligne entre deux points. De la même façon, la route sera repérée par rapport au nord comme l'angle de la demi-droite joignant le point de départ au point d'arrivée et de la demi-droite joignant le point de départ au nord, toujours dans le sens inverse du sens trigonométrique. Cet angle est désigné par le terme *cap du navire*.
Un *mille nautique* (mille) est égal à la longueur d'un arc de 1 minute d'un grand cercle [1] de la terre. Il vaut ainsi 1852 m. Le *nœud* est la vitesse de 1 mille par heure, soit 1,852km/h.

1. On appelle grand cercle d'une sphère tout cercle intersection de la sphère par un plan passant par le centre de la sphère. S'ils passent par le pôle nord (ou sud) il s'agit des méridiens.

Exemples

Déterminer sa position avec deux amers

Vous êtes au large sur un bateau et relevez le phare P au 38° et le clocher C au 75°. Déterminez sur la carte ci-dessous votre position exacte.

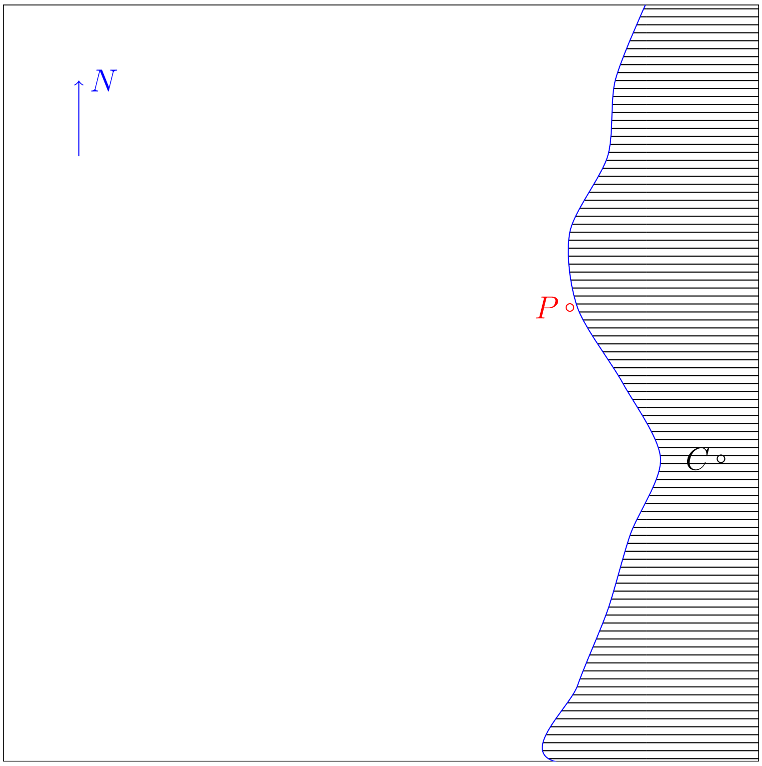

Figure 4: Construire votre position

Déterminer son cap et sa vitesse avec deux amers

Vous êtes au large et le bateau avance. A midi, vous relevez le phare P au 30°et l'église au 88°. Une heure plus tard, vous relevez P au 95°et C au 120°. Quel est votre cap ? Quelle est votre vitesse, en supposant, bien sûr, que vous avez gardé le cap ? (Faire le dessin sur la carte 5 et voir une correction sur la carte 6)

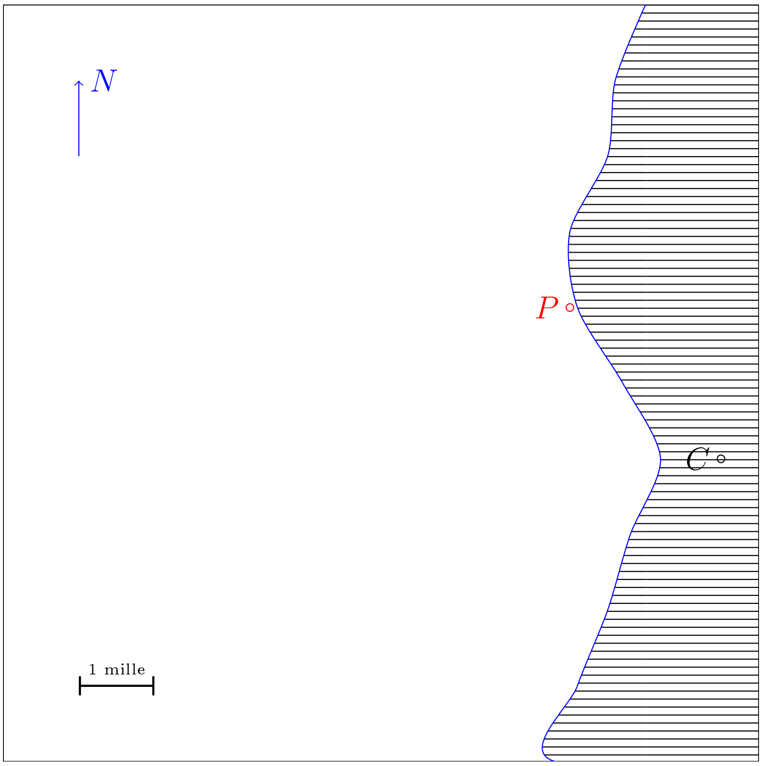

Figure 5: Quel est votre cap ? Quelle est votre vitesse ?

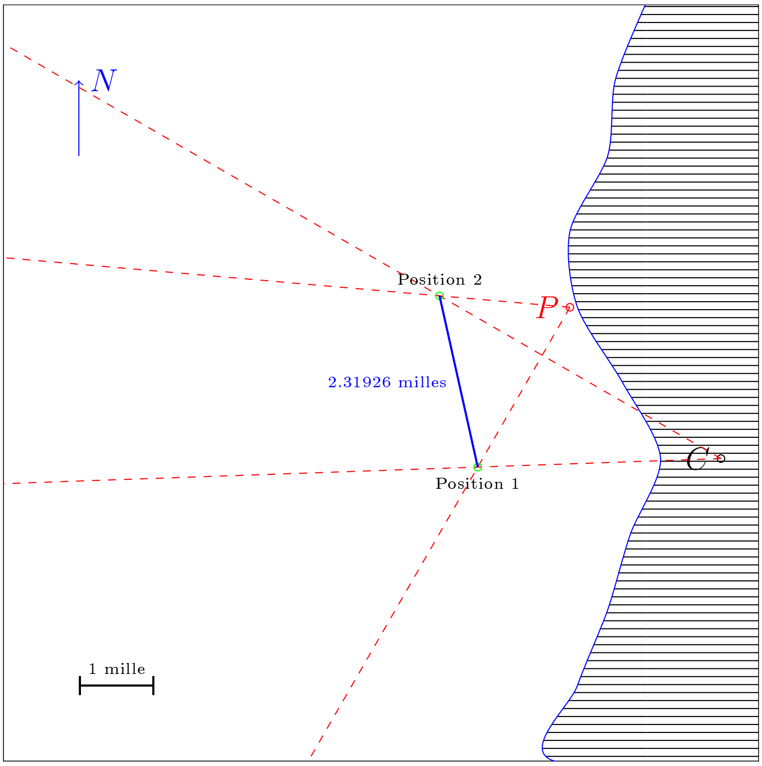

Figure 6: Cap et vitesse, environ 2,32 nœuds

Déterminer sa position avec trois amers
Votre boussole est cassée, impossible de déterminer le nord. A midi, vous voyez P et C sous un angle de 50°. Vous repérez sur la carte un château d'eau CE. Vous voyez P et CE sous un angle de 38°. Déterminez votre position sur la carte. (Faire la construction sur la carte 8 et voir

une correction sur la carte 9)
L'ensemble des points du plan qui voient un segment $[AB]$ sous un angle α est l'arc de cercle centré en O tel que :

$$\begin{cases} O \in \text{Med}([AB]) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$$

En effet, si on considère un cercle de centre O et un arc AB, quelque soit le point M de l'arc AB, $\widehat{AMB}$ est constant et

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$$

Par conséquent (voir figure 7), $2\beta + 2\alpha = \pi$ donc $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

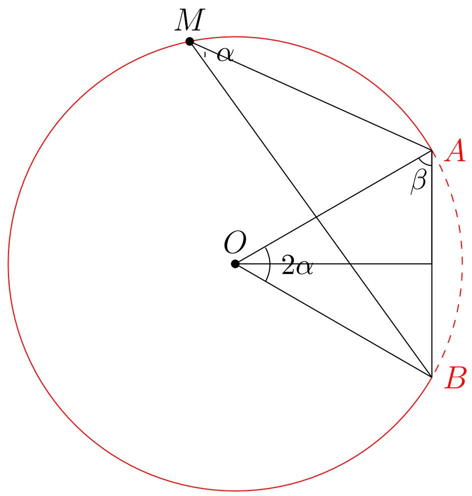

FIGURE 7: Angle au centre

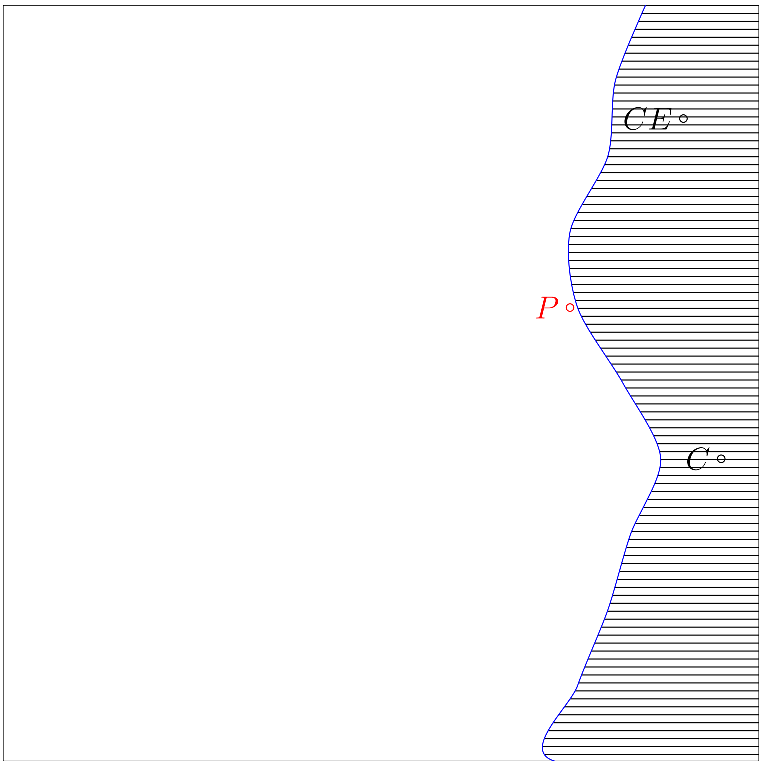

Figure 8: Position avec trois amers

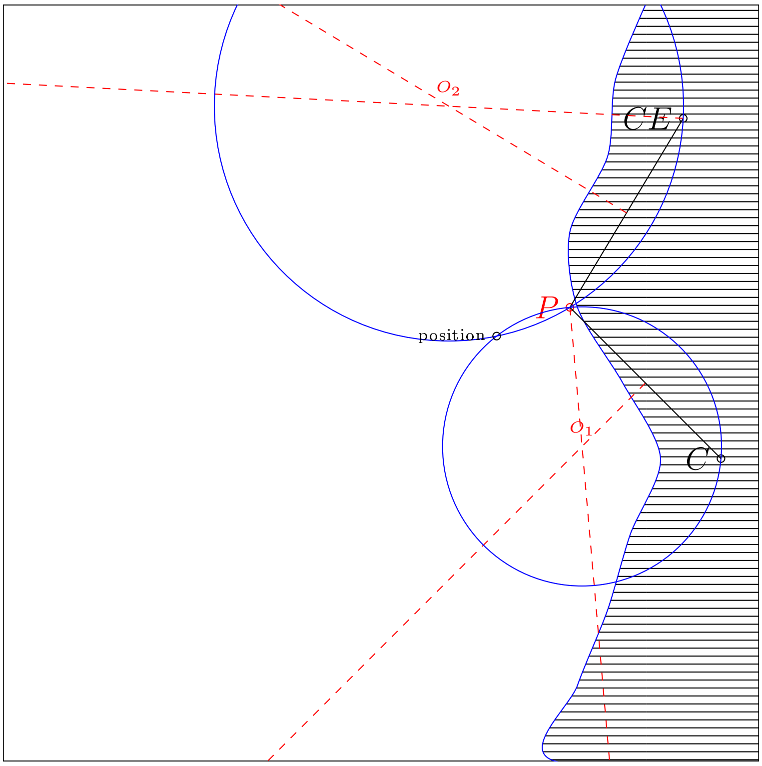

Figure 9: Position avec trois amers

2.2 Bâton de Jacob

Une deuxième proposition repose sur la mesure de distance entre points inaccessibles, en utilisant des instruments de mesure construits sur des propriétés mathématiques. Parmi ceux-là, le bâton de Jacob, inventé dit-on par Rabbi Levi ben Gershon (1288 - 1344), autrement appelé arbalestrille, permet d'évaluer des longueurs pourvu que le bâton puisse être placé perpendiculairement au segment à mesurer. Il est constitué de deux tiges perpendiculaires, graduées, dont la plus petite coulisse le long du plus grand (Fig. 10)

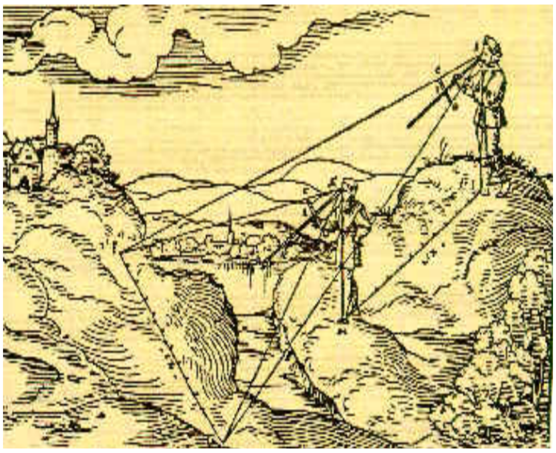

Figure 10: Bâton de Jacob

Le principe de fonctionnement s'appuie sur le théorème de Thales. Supposons en effet que l'on ait à mesurer la distance GF. En se plaçant initialement en un point A on vise avec la tige transverse G et F. Puis on déplace la tige transverse d'une longueur égale à la longueur de la tige ($EE' = DC$). En alignant de nouveau les points extrémités de la tige transverse avec G et F, le chemin parcouru est égal à la distance cherchée ($AA' = GF$). Voir figure 11.
En effet :

$$\frac{CD}{GF} = \frac{AE}{AK}$$

$$\frac{C'D'}{GF} = \frac{CD}{GF} = \frac{A'E'}{A'K} = \frac{AE - CD}{AK - AA'}$$

$$\frac{AE}{AK} = \frac{AE - CD}{AK - AA'}$$

$$AE \times AA' = AK \times CD = AE \times GF$$

$$AA' = GF$$

On peut également l'utiliser pour mesurer la hauteur d'un bâtiment, pourvu que l'on connaisse la distance horizontale au pied du bâtiment. C'est alors une application directe du théorème de Thales.
Mais son utilité première a été la mesure de la hauteur des étoiles pour déterminer la latitude d'un lieu. Il faut alors viser l'astre avec le haut du marteau et l'horizon avec le bas. L'angle que fait l'astre avec l'horizontale au lieu où l'on se trouve est ainsi déterminé. Si on mesure la hauteur méridienne du soleil, la latitude s'obtient en utilisant la formule :

$$\text{Latitude } = 90° - \text{hauteur méridienne} \pm \text{déclinaison du soleil}$$

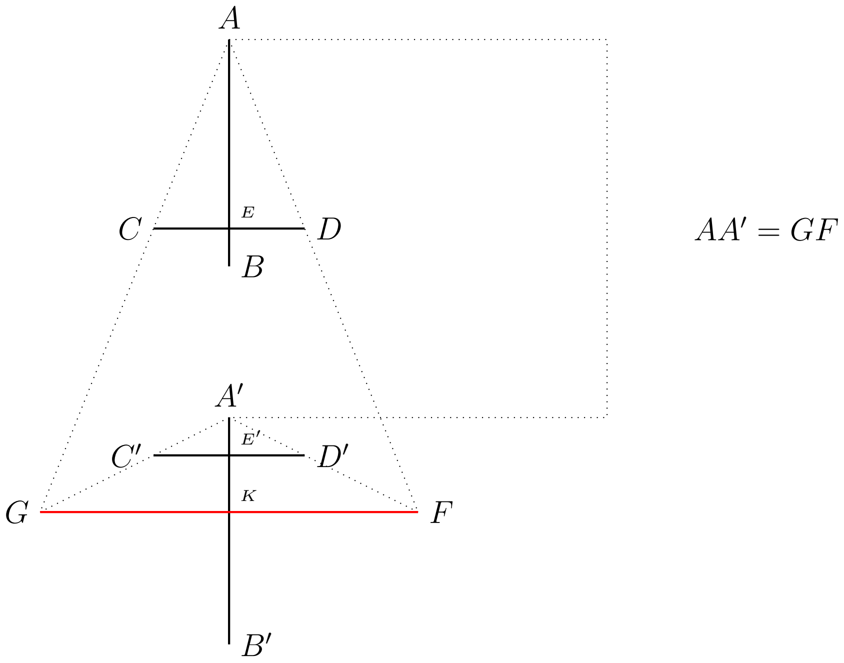

Figure 11: Fonctionnement du bâton de Jacob

3 Prolongements didactiques

Pour revenir au problème initial, les analyses mathématique et didactique montrent bien toute la richesse du problème et les différentes pistes de solution qui permettent de faire la construction. Il peut être intéressant avec des élèves de non seulement demander la résolution de problème mais aussi de chercher des solutions multiples. Changer de cadre de résolution est un exercice qui pourra être utilisé de nouveau lorsque des pistes se ferment ou bien pour mieux comprendre le pourquoi d'un problème. A ce propos, reprenons un autre problème, dont la multitude d'approches permet de comprendre fondamentalement le problème géométrique qui se pose.

3.1 Enoncé

Un triangle ABC étant donné, on trace le symétrique de A par rapport à B : A', le symétrique de B par rapport à C : B' et le symétrique de C par rapport à A : C'.
Si on efface les points A, B et C, comment les retrouver à partir de A', B' et C' ?

3.2 Quelques solutions

Analytique

On peut se placer dans un repère du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel :
$A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$; dans ces conditions :
$A'(2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2)$, $B'(2c_1 - b_1, 2c_2 - b_2)$ et $C'(2a_1 - c_1, 2a_2 - c_2)$
Ici, les inconnues sont a_i,b_i,c_i, $i = 1..2$ et les paramètres les coordonnées de A', B', C' notées $x_A, y_A, \ldots$

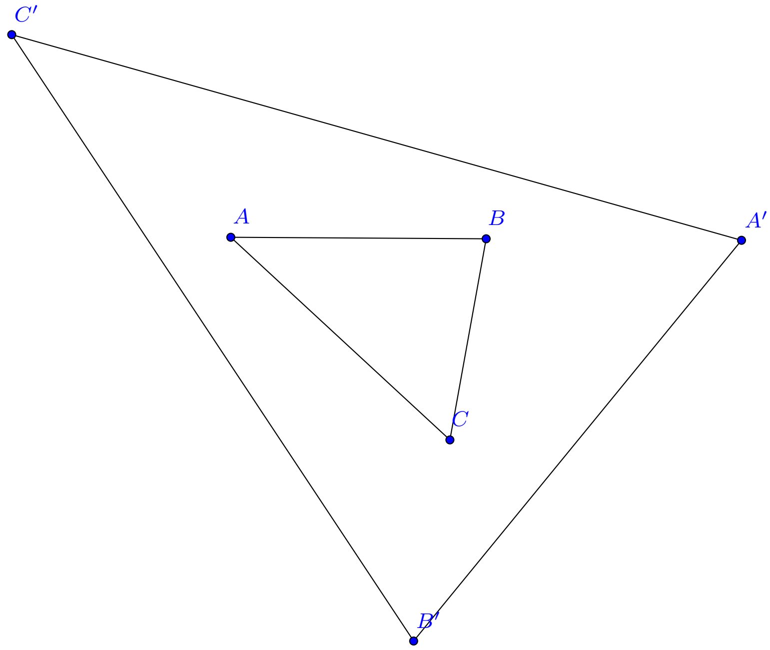

Figure 12: Les deux triangles

Le système à résoudre est donc :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2a_1 & & & & -c_1 & & = & x_C \\ & 2a_2 & & & & -c_2 & = & y_C \\ & & -b_1 & & +2c_1 & & = & x_B \\ & & & -b_2 & & +2c_2 & = & y_B \\ -a_1 & & +2b_1 & & & & = & x_A \\ & -a_2 & & +2b_2 & & & = & y_A \end{array}\right.$$

Le système se résout facilement en donnant :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{7}\cdot \mathrm{x_a} + \frac{2}{7}\cdot \mathrm{x_b} + \frac{4}{7}\cdot \mathrm{x_c} & a_2 = -\frac{1}{9}\cdot \mathrm{y_a} + \frac{2}{9}\cdot \mathrm{y_b} + \frac{4}{9}\cdot \mathrm{y_c} \\ b_1 = \frac{4}{7}\cdot \mathrm{x_a} + \frac{1}{7}\cdot \mathrm{x_b} + \frac{2}{7}\cdot \mathrm{x_c} & b_2 = \frac{4}{9}\cdot \mathrm{y_a} + \frac{1}{9}\cdot \mathrm{y_b} + \frac{2}{9}\cdot \mathrm{y_c} \\ c_1 = \frac{2}{7}\cdot \mathrm{x_a} + \frac{4}{7}\cdot \mathrm{x_b} + \frac{1}{7}\cdot \mathrm{x_c} & c_2 = \frac{-2}{9}\cdot \mathrm{y_a} + \frac{4}{9}\cdot \mathrm{y_b} - \frac{1}{9}\cdot \mathrm{y_c} \end{array}\right.$$

On peut alors tracer le point A par exemple, en écrivant la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{A'A} = \frac{2}{7}\overrightarrow{A'B'} + \frac{4}{7}\overrightarrow{A'C'}$$

Remarques :

1. On peut bien sûr de la même façon faire les calculs avec les affixes des points dans le plan complexe, ce qui ne change pas grand chose.
2. comme le problème est affine, on peut aussi se placer dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ avec

$$A(0{,}0)$$
$$B(1{,}0)$$
$$C(0{,}1)$$
$$A'(2{,}0)$$
$$C'(0,-1)$$
$$B'(-1{,}2)$$

donc $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Donc,

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{7}\left(\overrightarrow{A'B'} + 2\overrightarrow{A'C'}\right)\\ \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{A'B'} - \frac{3}{7}\overrightarrow{A'C'}\end{array}\right.$$

Ce qui permet de retrouver la position de A ($\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$), puis des deux autres points.
Ce qui est intéressant dans cette solution est de faire apparaître le dénominateur 7 et une écriture vectorielle qui peut faire penser à une solution barycentrique :

Barycentrique

En effet, on peut considérer :
A comme le barycentre du système $(C{,}1)(C'{,}1)$
B comme le barycentre du système $(A{,}1)(A'{,}1)$
C comme le barycentre du système $(B{,}1)(B'{,}1)$
Mais alors, en utilisant l'associativité de la barycentration, A peut être considéré comme :

- le barycentre du système $(B{,}1)(B'{,}1)(C'{,}2)$,
- le barycentre du système $(A{,}1)(A'{,}1)(B'{,}2)(C'{,}4)$ soit $(A'{,}1)(B'{,}2)(C'{,}4)$.

et on retrouve l'écriture vectorielle précédente.

Transformations

Le fait que, par exemple, B soit le milieu de $[A'A]$ peut faire penser à l'homotéthie h_1 de centre A' et de rapport 2 qui transforme B en A, de même, h_2 de centre B' de rapport 2 transforme C en B et h_3 de centre C' de rapport 2 transforme A en C
donc $h_1 o h_2 o h_3$ est une homothétie de rapport 8 qui transforme A en A : c'est donc le centre de cette homothétie.
h_3 et h_2 étant deux homothéties de rapport 2 et de centre C' et B', le centre de l'homothétie produit est le point Ω tel que : $\overrightarrow{C'\Omega'} = 2\overrightarrow{C'\Omega}$ et $\overrightarrow{B'\Omega} = 2\overrightarrow{B'\Omega'}$.
Finalement : $\overrightarrow{C'\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'B'}$
Le centre A du produit de cette homothétie de centre Ω et de rapport 4 et de h_1 vérifie, en appelant A_1 l'image de A par $h_2 o h_3$:
$\overrightarrow{\Omega A_1} = 4\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{A'A_1}$ et donc :

$$\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{7}\Omega A'$$

Ce qui est ici encore intéressant est de voir que le point A se trouve sur la droite qui joint A' et le tiers du segment$[C'B']$. Ce qui peut amener la solution suivante que l'on peut justifier directement :

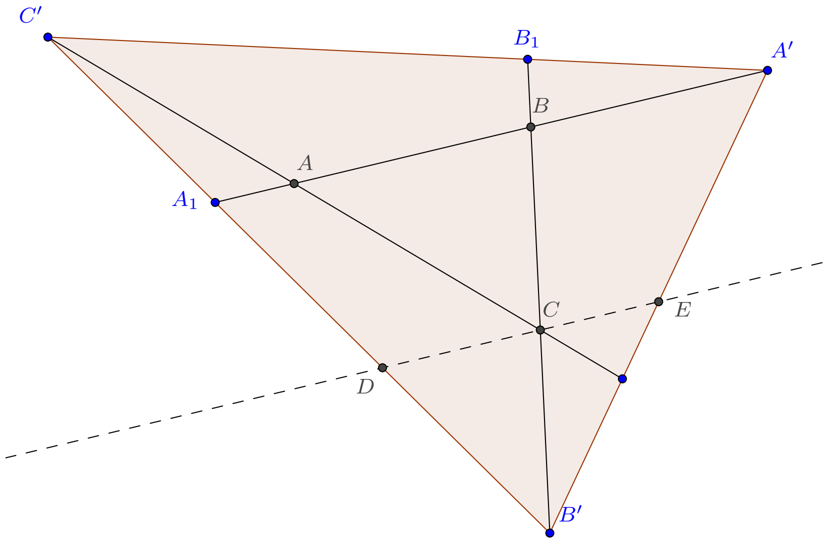

Figure 13: Une construction simple

Thalès

La construction qui en résulte est simple et peut être justifiée avec des outils simples, même si les arguments sont moins directs que dans les démonstrations précédentes. En effet :
A_1 est donc au tiers de $[C'B']$, B_1 au tiers de $[A'C']$ (voir figure 13 ; on appelle B le point d'intersection de $(A'A_1)$ et $(B'B_1)$. Considérons le point D milieu de $[A_1B']$ (et donc au deux tiers de $[C'B']$) et la droite parallèle à (A_1A') passant par D. Elle coupe $[B'A']$ en son milieu E. Mais alors dans le triangle $B'BA'$ cette droite coupe $[B'B]$ en son milieu ; nommons le C.
Dans le triangle $C'CD$, le côté $[CC']$ rencontre (A_1A') en un point qui est le milieu de $[C'C]$ que l'on appelle A.
Le triangle ABC est bien le triangle cherché.

Itération

L'idée est de recommencer l'opération pour obtenir un troisième triangle. Notons ABC, $A'B'C'$ et A'',$B''C''$ ces trois triangles (Voir figure 14).
Remarque : les trois triangles ont le même centre de gravité G.
En effet, A' est le barycentre de $(A,-1)$,$(C,2)$, B' de $(B,-1)$,$(A,2)$ et C' de $(B,2)$,$(C,-1)$
Donc l'isobarycentre de A', B' et C' est $(A,-1)$,$(C,2)$,$(B,-1)$,$(A,2)$,$(B,2)$,$(C,-1)$ soit $(A,1)$,$(B,1)$,$(C,1)$; par un raisonnement analogue on obtient de même que G est le centre de gravité de $A''B''C''$.
Par ailleurs

$$\overrightarrow{B''A''} = \overrightarrow{B''B'}+\overrightarrow{B'A''} = 2\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{A'B'} = 2(\overrightarrow{C'B}+\overrightarrow{BB'})+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA} = 7\overrightarrow{BA}$$

Donc (AB) et $(A''B'')$ sont parallèles. De la même façon, on démontre que les côtés de ABC et $A''B''C''$ sont parallèles deux à deux. Les deux triangles sont homothétiques dans un rapport 7.
Par conséquent, en traçant les parallèles respectives aux côtés du triangle $A''B''C''$ passant par A', B' et C', on construit le triangle ABC (Figure 15)

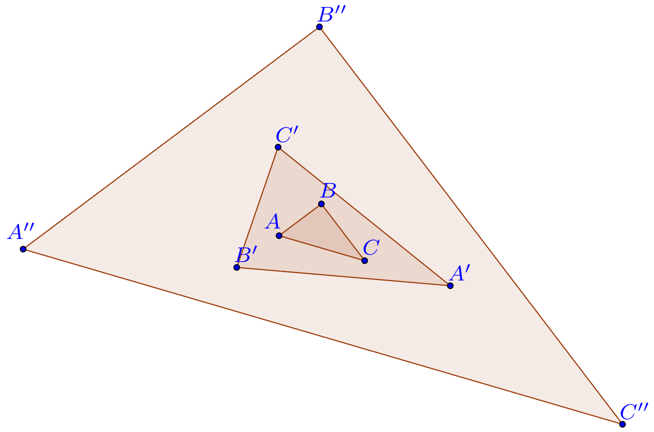

Figure 14: Trois générations

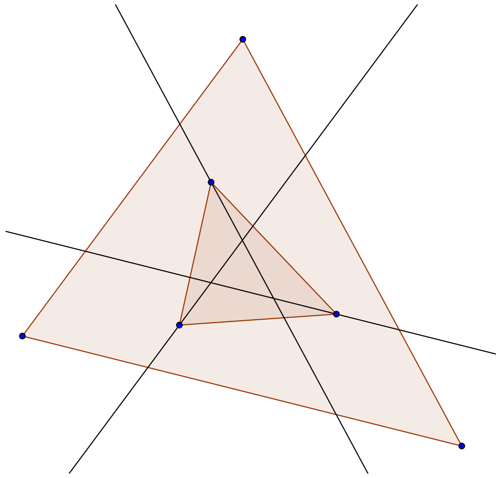

Figure 15: La construction à partir de la génération suivante

3.3 Petits bonus

7, encore !

On se place dans le plan euclidien.
Considérons deux triangles successifs. Appelons a, b et c les longueurs des côtés du petit triangle et a_1, b_1 et c_1 les longueurs du grand triangle.
On considère les trois triangles de côtés de longueur $2b$, a et a_1 puis $2a$, c et c_1 et $2c$, b et b_1.

$$a_1^2 = 4b^2 + a^2 + 4ab\cos(\gamma)$$
$$b_1^2 = 4c^2 + b^2 + 4bc\cos(\alpha)$$
$$c_1^2 = 4a^2 + c^2 + 4ca\cos(\beta)$$

En effet les angles au sommet valent $\pi - \gamma$, $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$.
On peut donc écrire :

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 5(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab\cos(\gamma) + bc\cos(\alpha) + ca\cos(\beta))$$

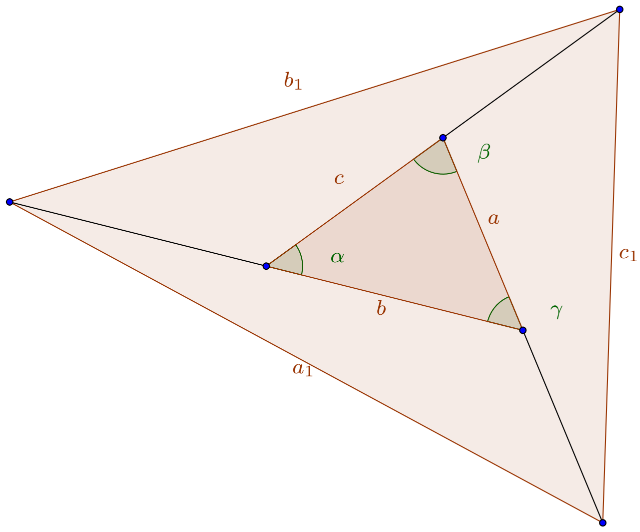

Figure 16: Dans le plan euclidien

Mais $2ab\cos(\gamma) = -c^2 + a^2 + b^2$ et par permutation circulaire, $2bc\cos(\alpha) = -a^2 + b^2 + c^2$ et $2ca\cos(\beta) = -b^2 + c^2 + a^2$ et donc :

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 7(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\boxed{\frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 7}$$

Conique

En faisant la construction en tournant dans les deux sens (A' symétrique de A par rapport à C puis A" symétrique de A par rapport à B etc.) on obtient deux triangles, soit 6 points qui sont tous sur une même ellipse.
Preuve
Si le triangle de départ est équilatéral, les six points sont sur le même cercle dont le centre est le centre de gravité du triangle initial.

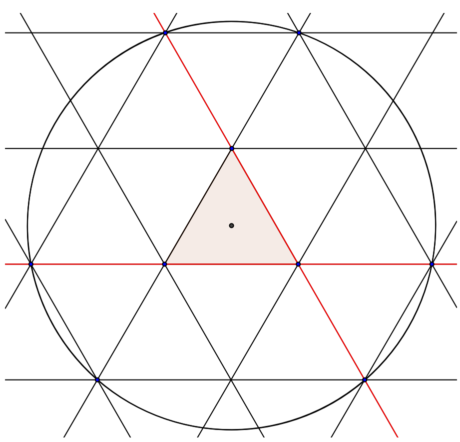

Figure 17: Cercle circonscit

Tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Une application affine conserve les intersections de droites et transforme un cercle dans une ellipse. Les six points sont donc sur une même ellipse. *QED*

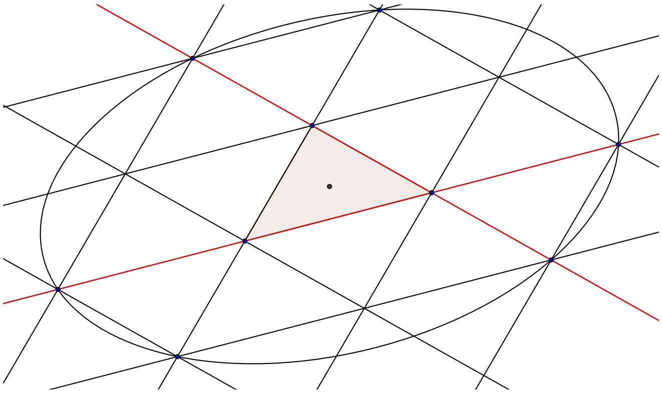

Figure 18: Ellipse passant par les 6 points