Une intersection inaccessible
Analyse mathématique

Équipe DREAM

27 mars 2021

Table des matières

1 L'énoncé du problème

(d) et (d') sont des droites qui ne se coupent pas sur la feuille

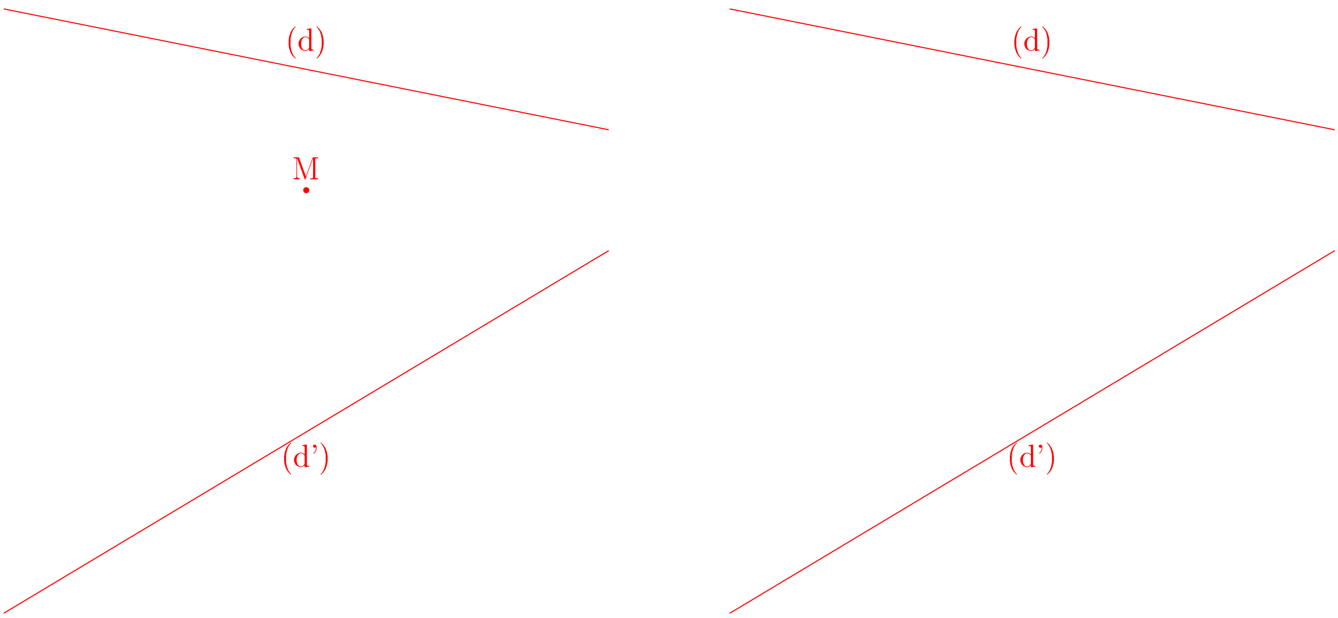

FIGURE 1 – Peux-tu tracer la droite passant par le point M et par le point O intersection de (d) et (d') ? Peux-tu déterminer l'angle des deux droites ?

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

2.1 Détermination de l'angle de deux droites avec une méthode accessible au collège

Placer des points A et B sur d, C et D sur d'. Soit I le milieu de $[AC]$ et D' le symétrique de D par rapport à I. La droite (AD') est parallèle à d' et l'angle $\widehat{BAD'}$ représente l'angle des droites d et d'. En effet les angles alternes-internes $\widehat{BAD'}$ et $\widehat{AOD}$, par rapport à la sécante (AO), sont égaux.

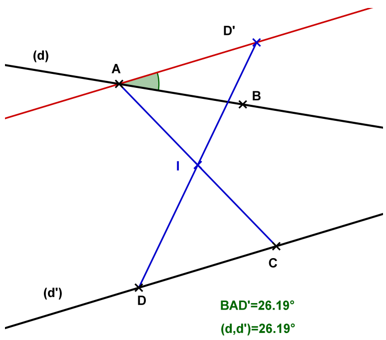

FIGURE 2 – Une construction utilisant les angles

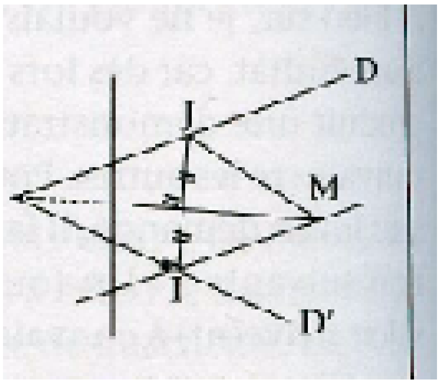

FIGURE 3 – Utilisation de parallèles

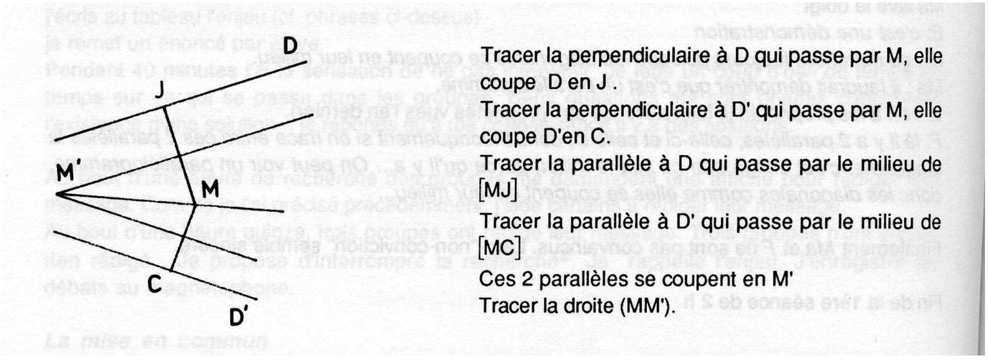

FIGURE 4 – Avec une homothétie

2.2 Détermination de la droite passant par un point de la page et par l'intersection inaccessible

Tracer les parallèles à D et D' qui passent par M (la parallèle à D coupe D' en I ; la parallèle à D' coupe D en J). Rechercher le milieu de $[IJ]$
Tracer la droite passant par M et par le milieu de $[IJ]$.

2.3 Une autre construction

Et si l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ ne suffit pas , on peut utiliser l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$

2.4 Une variante

Une variante de la méthode proposée par les élèves peut être de construire un parallélogramme de centre M, dont les côtés sont portés par (d et d'. Pour cela il suffit de construire les droites symétriques de d et d' par rapport à M. On obtient un parallélogramme dont une diagonale est la droite cherchée.

2.5 Avec le théorème de Thalès

On trace une droite p passant par M coupant d et d' en C et D.
On construit le milieu J de $[CD]$. On trace une parallèle à d passant par le point J.
Elle coupe d' en B. On construit une droite q parallèle à p passant par B et qui coupe d en A.

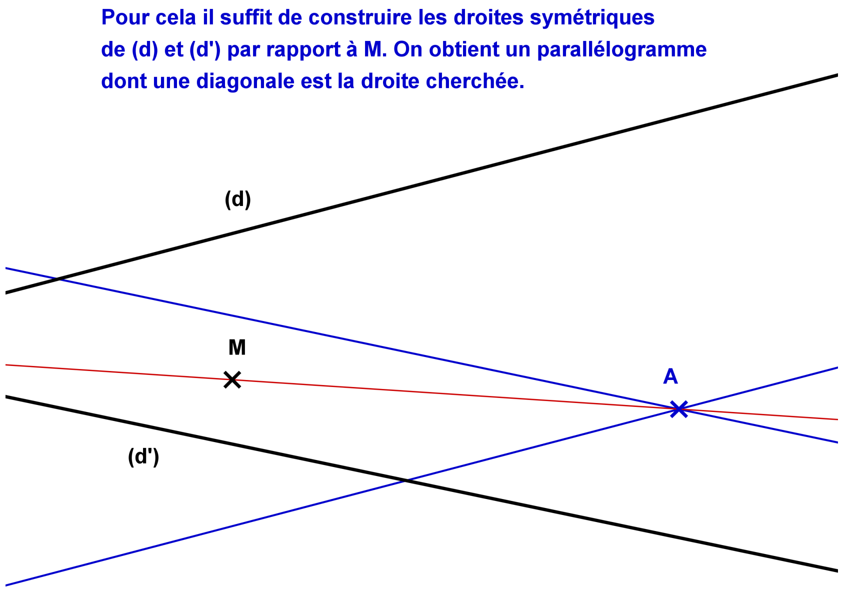

Figure 5 – Avec un parallélogramme

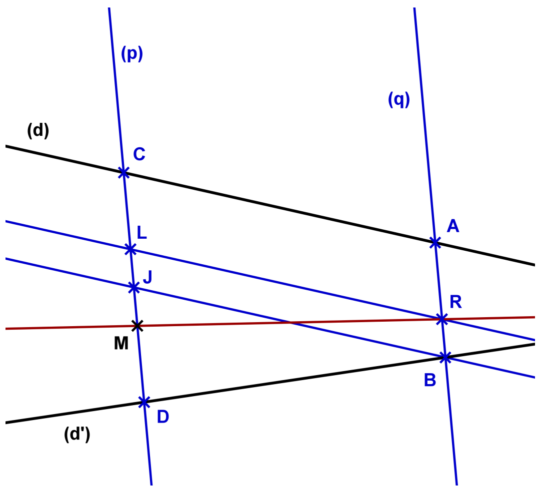

Figure 6 – Avec le théorème de Thalès

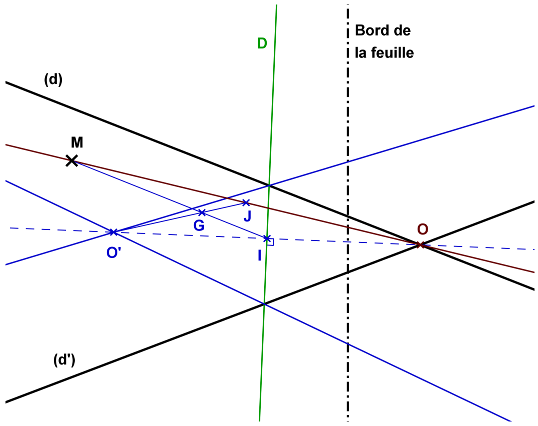

Figure 7 – Avec une réflexion

On cherche le milieu L de $[CM]$. On construit le point R intersection de q et de la parallèle à d passant par L.
La droite (MR) est la droite cherchée.

2.6 Utilisation de droites remarquables du triangle

Considérer un triangle MNP avec N sur d', P sur d et tel que d et d' soient deux hauteurs de ce triangle.
Alors la droite cherchée sera la hauteur issue de M, c'est à dire la perpendiculaire en M à NP).
O est ici l'orthocentre de MNP.
On peut aussi considérer un triangle MNP avec N sur d', P sur d et tel que d et d' soient deux bissectrices intérieures ou extérieures du triangle MNP.
Alors la droite cherchée sera la bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$.
O est ici le centre du cercle inscrit ou exinscrit du triangle MNP.

2.7 Méthode utilisant la réflexion, et le centre de gravité

- Réflexion
- Centre de gravité comme concours des médianes
- Centre de gravité comme point situé sur une médiane, à $\frac{2}{3}$ du sommet.
- Homothétie ou construction d'un point M défini par :
  $\overrightarrow{AM} = \text{k}\ \overrightarrow{AB}$

L'idée de cette méthode consiste à remarquer que même si l'on ne connaît pas le point O, on peut dire que l'on sait que le triangle MOO' a pour médiane le segment $[MI]$.
D est une droite située dans le demi-plan de frontière le bord de la feuille, contenant M.
Elle n'est pas nécessairement parallèle au bord de la feuille.
On construit les symétriques des droites d et d' par rapport à D, ce qui permet de construire O', symétrique de O par rapport à la droite D. On note I le projeté orthogonal de O' sur la droite D.
On construit G, centre de gravité du triangleMOO', en utilisant le fait que G est au $2/3$ de la médiane $[MI]$, en partant de M. On construit ensuite le point J tel que $\overrightarrow{O'J} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{O'G}$.
Le point J est alors le milieu du côté $[MO]$. La droite cherchée, (MO), est donc la droite (MJ).

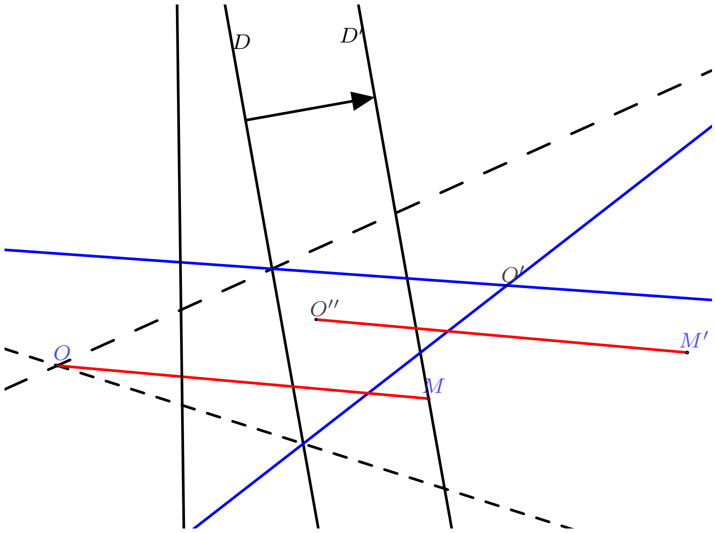

Figure 8 – Utilisation d'une translation, composée de deux réflexions d'axes parallèles

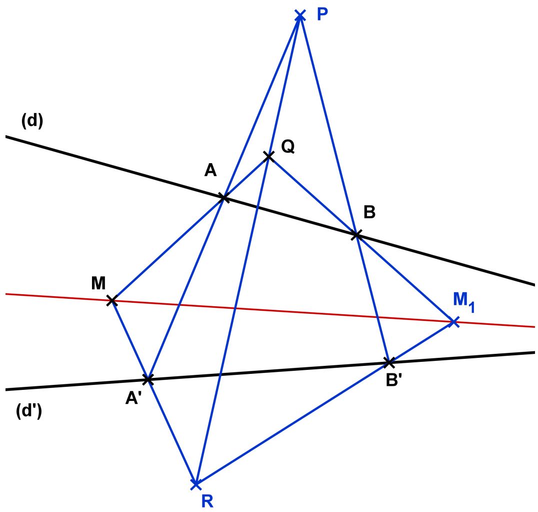

Figure 9 – Avec le théorème de Desargues

2.8 Une construction avec une translation

Notons D une droite qui ne passe pas par M et D' la parallèle à D qui passe par M.
On construit les symétriques de (d) et de (d') par rapport à D, et O' est leur intersection.
Appelons O" le symétrique de O' par rapport à D'.
Appelons t la translation de vecteur $2\vec{u}$ (c'est la composée de ces deux symétries) où $\vec{u}$ est le vecteur amenant D sur D' et tel que $\vec{u} \perp D$.
On construit alors l'image M' de M par t. Et donc on a : $(OM)//(O"M')$
Pour tracer (OM) il suffit donc de mener par le point M la parallèle à la droite $(O"M')$.

2.9 Une solution avec le théorème de Desargues

Placer deux points A et B sur d, deux points A' et B' sur d' et un point Q sur la droite (AM). Les droites (AA') et (BB') se coupent en P, la droite (MA') coupe (PQ) en R. Les droites (QB) et (RB') se coupent en M_1. La droite (MM_1) passe par O.

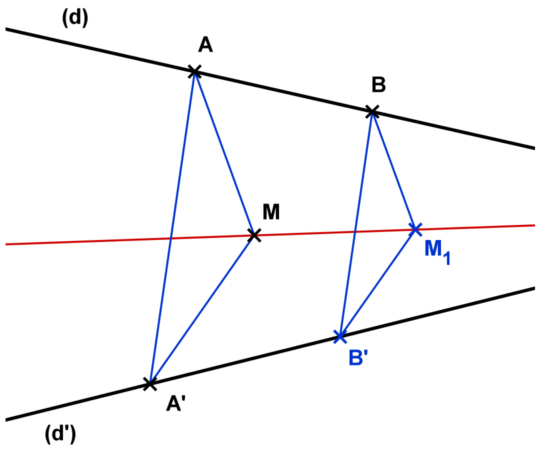

Figure 10 – Encore le théorème de Desargues

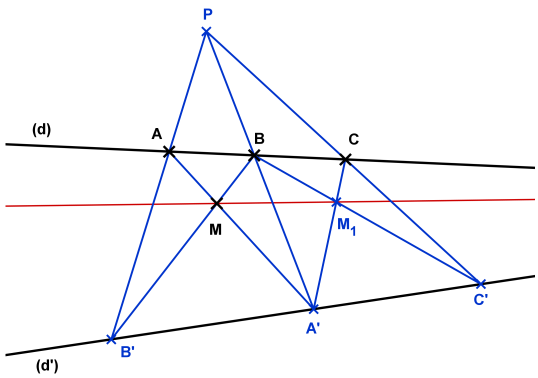

Figure 11 – Avec une polaire

2.10 Deuxième proposition, encore avec Desargues

Cas où les droites (AA') et (BB') sont parallèles.
Dans le plan projectif la droite (PQ) est alors la droite de l'infini.
Placer deux points A et B sur d et un point A' sur d'.
La parallèle à (AA') passant par B coupe d' en B'.
Les parallèles à (AM) et $(A'M)$ passant par B et B' se coupent en M_1. La droite (MM_1) passe par O.

2.11 Utilisation d'une polaire

Placer deux points A et B sur d. La droite (MA) coupe d' en A' et la droite (MB) coupe d' en B'. Le point P intersection de (AB') et $(A'B)$ est un point de la polaire de M.
Construire la polaire de P par rapport à d et d' : placer un point C, distinct de A et B, sur d. La droite (PC) coupe d' en C'. Le point M_1 intersection de $(A'C)$ et (BC') est un point de la polaire de P. La droite (MM_1), polaire de P, passe par O.

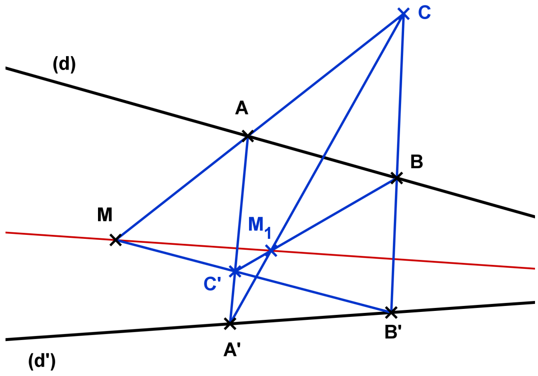

Figure 12 – A la règle seule

2.12 Construction à la règle seule d'Ocagne

Soient A et B deux points de d et A' un point de $d'.B'$ appartient à d' et $(BB')//(AA')$
Les droites (MA) et (BB') se coupent en C, les droites (MB') et (AA') se coupent en C'.
Les droites (BC') et $(A'C)$ se coupent en M_1. La droite (MM_1) passe par le point O.