Une intersection inaccessible
Analyse didactique

Équipe DREAM

27 mars 2021

Table des matières

1 Énoncé du problème

(d) et (d') sont des droites qui ne se coupent pas sur la feuille

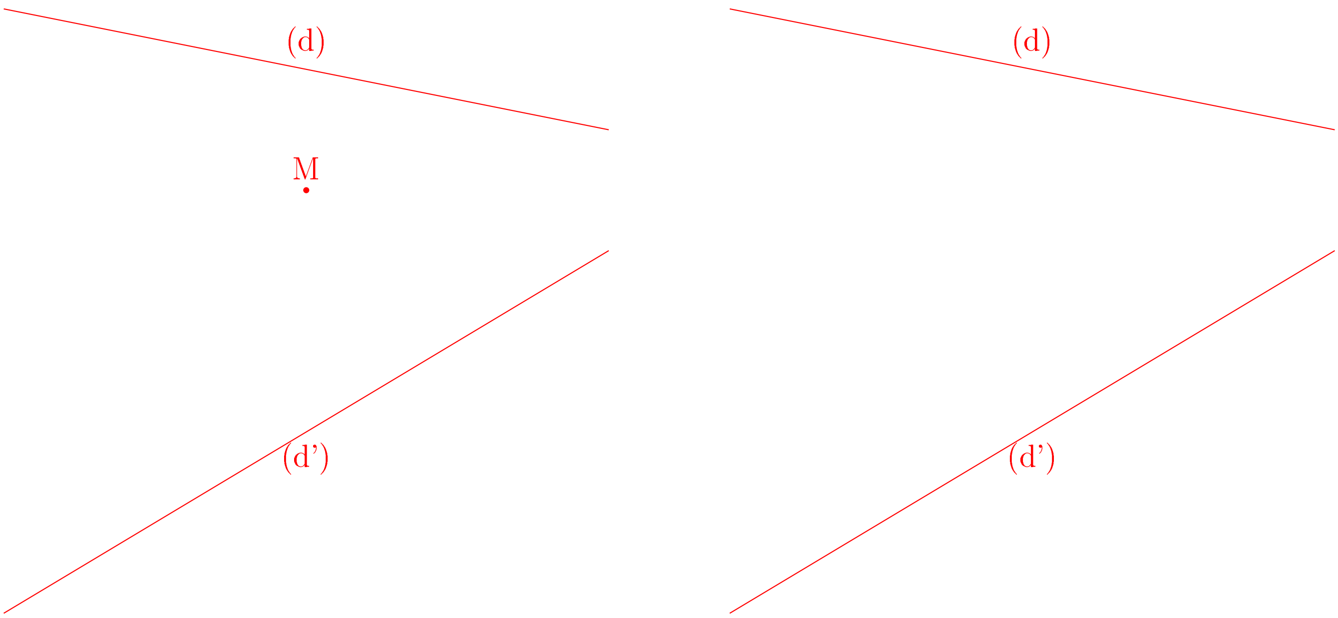

Figure 1: Peux-tu tracer la droite passant par le point M et par le point O intersection de (d) et (d') ? Peux-tu déterminer l'angle des deux droites ?

2 Variables de la situation

Les deux situations proposées dans l'énoncé sont deux variantes, équivalentes d'un point de vue mathématique, mais qui constituent des variables didactiques importantes. Le premier énoncé induit une construction et l'usage des instruments de mesure et de tracé. On peut encore restreindre les possibilités en demandant une construction « à la règle et au compas ». Mais, à part une distraction, cette exigence ne modifie pas les pistes de recherche. Le second énoncé amène à chercher comment caractériser un angle ; avec une mesure ou en le comparant à d'autres angles, ou en construisant un secteur angulaire de même angle. Ainsi, ce deuxième énoncé amène à se poser des questions qui sont des premières réflexions conduisant à une solution.
Une deuxième variable importante est le dessin (Voir fig. 1) qui est fourni, ou non, et le support sur lequel il est proposé. Le donner sur une feuille comme c'est indiqué dans l'énoncé induit de façon très forte de s'affranchir de l'impossibilité d'atteindre le point d'intersection des deux droites et de faire le dessin comme on le voit sur la figure 2. Ce qui permet de construire la droite cherchée (ou de mesurer l'angle demandé). Ainsi le problème est transformé en comment tracer cette droite ou mesurer cet angle sans connaître le tracé bleu. C'est une méthode très fructueuse de recherche en géométrie qui ainsi peut être mise en exergue dans ce problème ; c'est aussi une validation du milieu : à partir du moment où une construction est réalisée, il est possible de vérifier qu'elle coïncide bien avec le dessin fourni. On pourra à cet égard regarder le deuxième problème proposé dans les prolongements qui peut être réfléchi en supposant la construction faite.
Dans ce cas on peut également tracer à l'angle d'un mur deux droites empêchant ainsi cette construction initiale comme c'est illustré sur la figure 3. Dans ces conditions, une modélisation à l'intérieur des mathématiques est nécessaire pour se ramener à un dessin qui pourra être le

modèle. Mais on voit que la validation ne pourra pas se faire par le tracé mais uniquement par le raisonnement mathématique et la confiance en ce raisonnement. Il s'agit ainsi de choix importants suivant ce que l'on veut privilégier dans la recherche de ce problème.

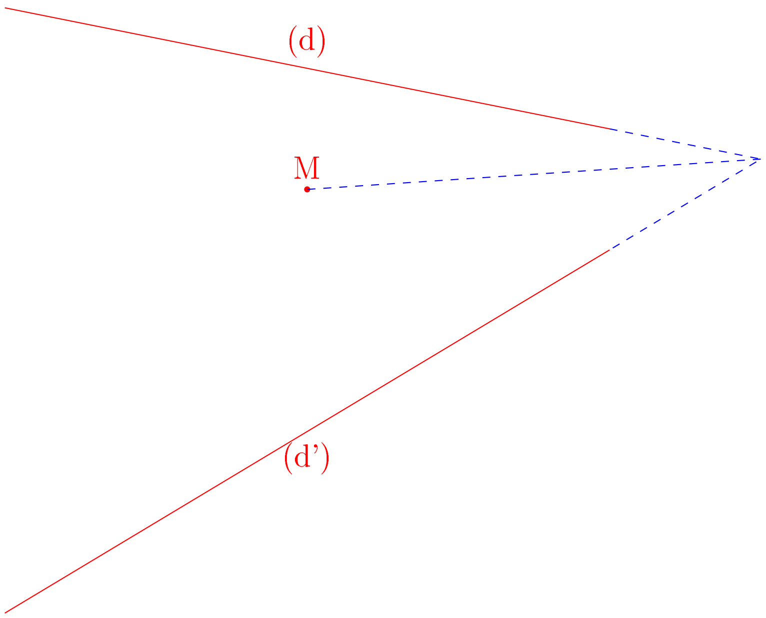

Figure 2: Possibilité de prolonger les droites

3 Connaissances et capacités en jeu

- Utiliser en acte les résultats sur les homothéties pour obtenir un troisième point de la droite cherchée.
- Le tracé d'une parallèle et l'utilisation des angles alternes-internes permet dans une des versions du problème de déterminer l'angle cherché.
- Construire le symétrique de (d) et (d') par rapport à M.
  L'intersection de ces deux nouvelles droites (si elle existe sur la page) fournit un troisième point de la droite cherchée.
- Construire un parallélogramme dont une des diagonales est la droite cherchée.
- Considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux hauteurs de ce triangle. Alors la droite cherchée sera la hauteur issue de M, c'est à dire la perpendiculaire en M à (NP). O est ici l'orthocentre de MNP.
- Utilisation du parallélogramme pour tracer des parallèles et/ou pour reporter des longueurs.
- Considérer les triplets proportionnels $(a; x; a-x)$ et $\left(\frac{a}{2}; \frac{x}{2}; \frac{a-x}{2}\right)$
- Le théorème de Thalès dans différents triangles permet de prouver que O, P, M sont alignés.
- Considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux bissectrices intérieures ou extérieures du triangle MNP. Alors la droite cherchée sera la bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$. O est ici le centre du cercle inscrit ou exinscrit du triangle MNP.
- Plusieurs approches sont possibles pour travailler par exemple avec l'homothétie ; homothétie de centre M transformant (d) et (d') ou homothétie de centre O transformant par

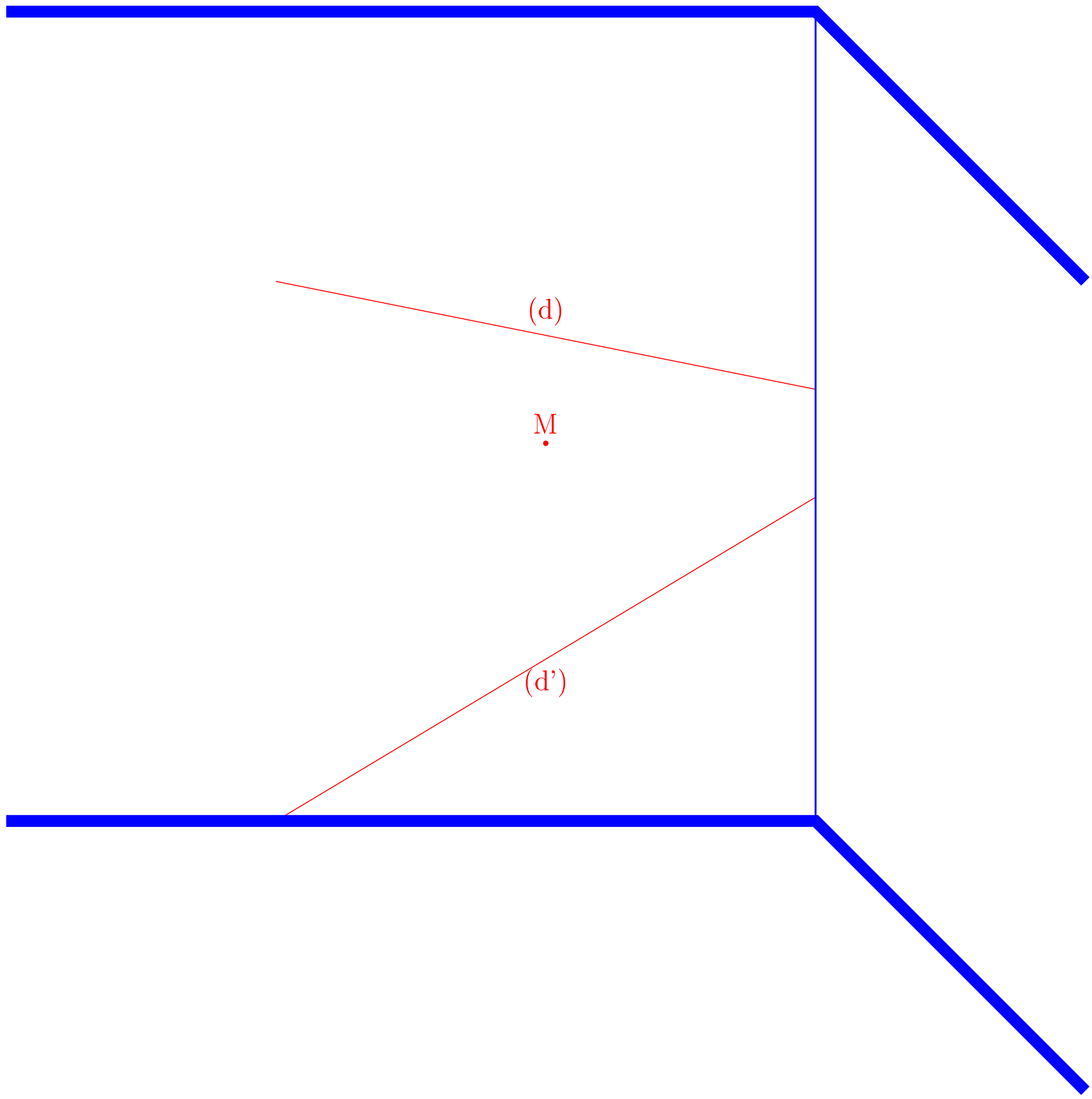

Figure 3: Tracer les droites sur un mur

exemple une sécante à (d) et (d') en une sécante parallèle.

-

4 Procédure(s) élèves

L'idée d'une « réduction » de la figure arrive de façon assez naturelle. En revanche le « comment » est plus délicat. Suivant le niveau de la classe considérée et les connaissances mathématiques à disposition, cette réduction passe par l'application du théorème de Thalès ou bien l'application d'une homothétie ou encore par des procédures induites par le parallélisme, en utilisant les angles alterne-internes, par exemple, ou la réflexion ou encore les droites remarquables du triangle, ce qui permet d'envisager l'utilisation de ce problème avant l'introduction du théorème de Thalès.
Les premières idées que les élèves essayent de mettre en œuvre sont souvent liées à des construc-

tions simples (utiliser des milieux, des symétriques, des parallèles, etc.) souvent sans relation directe avec une réflexion mathématique sur l'utilisation de ces constructions. Les expériences initialement produites reposent souvent sur la volonté d'utiliser des concepts ou des notions mathématiques sans faire le lien avec la situation elle-même. Il est alors important de rediriger la réflexion en questionnant l'opportunité des constructions.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

Une première difficulté, illustrée par l'extrait figurant dans la mise en œuvre en classe de 4eme, provient de la prise en compte (ou pas) de l'universalité de la solution proposée : est-ce que la construction faite est possible quelle que soit la position des droites (et du point d'intersection) ? A quelle(s) condition(s) est-elle possible ? Cette question n'est pas souvent abordée bien que cruciale (la construction donnée par le groupe de 4eme est une bonne illustration).
Le démarrage peut être difficile en ce sens que les élèves n'ont pas d'idées initiales ou des idées reposant sur une symétrie présumée de la figure (par exemple supposer que la droite va passer par le milieu des points d'intersection de la droite avec le bord de la feuille). La confrontation avec différentes figures est ici importante pour déstabiliser quelques convictions initiales et pour rechercher une solution qui puisse fonctionner quel que soit le dessin et le support initiaux.
D'autres difficultés rencontrées par les élèves viennent souvent de la difficulté à rajouter des points sur la figure initiale. Tout se passe comme si tous les tracés devaient être construits à partir des éléments initiaux de la figure. Ainsi, par exemple, considérer un point K quelconque et utiliser l'homothétie de centre K et de rapport k suffisamment petit pour que les images des droites se coupent sur la feuille, n'est pas naturel.