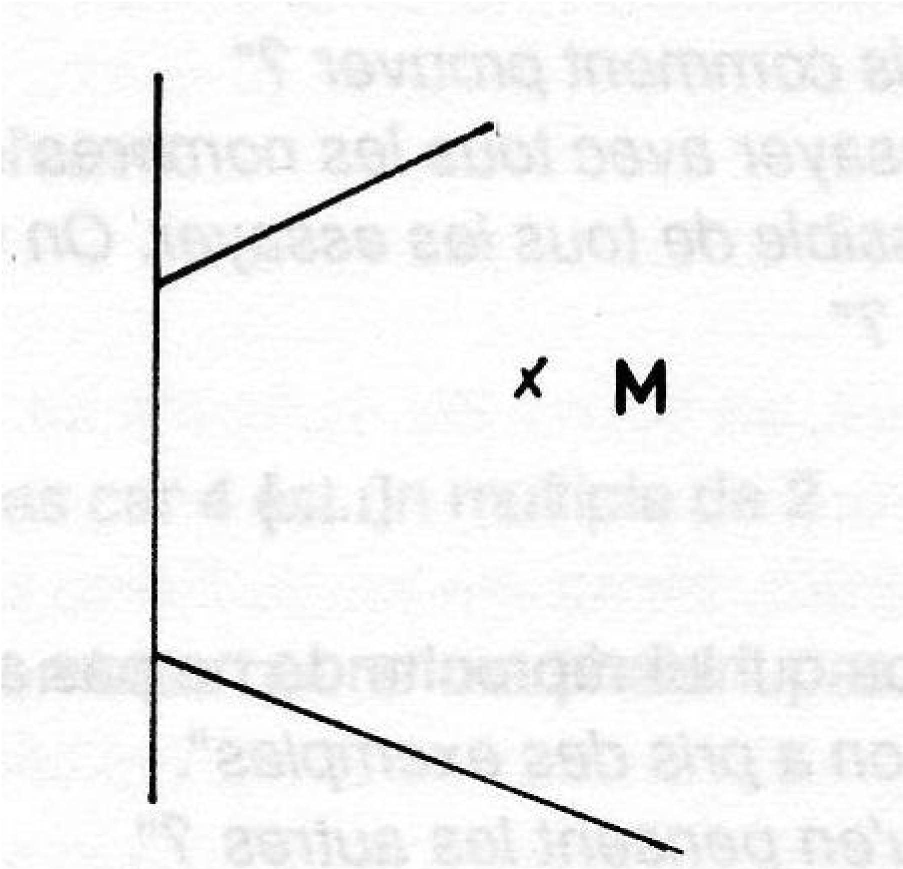
Une intersection inaccessible
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

27 mars 2021

Table des matières

1 Énoncé du problème



Autre formulation possible

Sur une feuille, sont tracées deux droites D et D' et un point M. Ces deux droites se coupent à l'extérieur de la feuille en O. Rédige une méthode qui permette de tracer la droite (OM) sans sortir de la feuille.

2 Scénario(s) dans la classe

2.1 Scénario en quatrième

Le scénario de gestion d'un problème ouvert est particulièrement détaillé dans l'ouvrage :
« Les pratiques du problème ouvert » - G. Arsac, M. Mante - Septembre 2007
En voici un extrait :
Bien sûr, je ne voulais pas demander directement aux élèves de démontrer leur résultat, car dès lors je serais retombé dans la situation habituelle : l'élève produit une démonstration pour le professeur et non pour se convaincre ou convaincre les autres. Pour que l'élève produise des preuves, sans que le professeur ne lui en demande, il faut un enjeu. J'ai donc proposé à mes élèves la compétition suivante : « Un (ou des) groupe(s) sera (seront) déclaré(s) vainqueur(s) s'il(s) arrive(nt) à convaincre toute la classe que sa (leur) solution est bonne ».
Je me proposais par ailleurs d'intervenir le moins possible au cours de la recherche des élèves, mais de les aider à rédiger leur message de façon à ce qu'au cours de la mise en commun, il y ait le moins possible de problèmes de compréhension. C'est un choix que j'ai fait, mon objectif

n'étant pas d'amener les élèves à travailler sur la rédaction de leur message (ce peut être un objectif du problème ouvert) mais plutôt d'amener les élèves à débattre de la validité de leur message.

2.2 Scénario en première L

Le deuxième scénario est globalement proche du précédent mais l'énoncé et le lancement de la séance sont différents.
Lors d'une séance de TD, les élèves sont installés par groupe de trois ou quatre.
Le professeur débute la séance au tableau.
Il oralise le problème en l'illustrant en même temps par un croquis.
Les élèves peuvent poser des questions. Aucun support ne leur est donné.
Ils utilisent le matériel qu'ils désirent (papier blanc ou quadrillé, petits ou gros carreaux, règle graduée, compas, équerre, calculatrice sans logiciel de géométrie dynamique).
Après ce temps d'introduction, les élèves recherchent en groupes.
Le professeur circule pour prendre de l'information, relancer éventuellement les groupes « bloqués ». Après un temps suffisant, il est demandé aux élèves de rédiger leurs résultats sur transparents ou affiches et une mise en commun est réalisée.

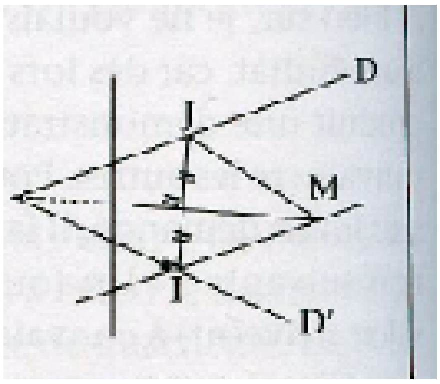
3 Production(s) d'élève(s)

4 Comptes rendus

4.1 En quatrième

Première séance : Le temps de recherche
Les élèves ont été prévenus la veille que je consacrerais 2 heures à la recherche d'un problème ouvert.
Avant de donner l'énoncé, je précise les consignes suivantes (ces consignes sont écrites au tableau) :
« Premier temps : recherche individuelle (5 ou 10 minutes).
Deuxième temps : recherche par groupe ; vous rédigez vos résultats sur une affiche.
Troisième temps : discussion des affiches ; la classe décide du (ou des) groupe(s) vainqueur(s). »
J'écris l'enjeu au tableau (cf. scénario) et je remets un énoncé par élève.
Pendant quarante minutes, j'ai la sensation de ne pas intervenir. Je jette un coup d'œil de temps en temps sur ce qui se passe dans les groupes.
Deux questions me sont posées concernant l'existence d'une solution : je réponds qu'à ma connaissance il y a des solutions.
Au bout d'une heure de recherche, des groupes me demandent une affiche pour rédiger leur message. Au bout d'une heure quinze, trois groupes ont rédigé leur message. Trois groupes n'ont encore rien rédigé.
Je propose d'interrompre la recherche (Passer à la mise en commun alors que tous les groupes n'ont pas rédigé d'affiche pose problème, en particulier parce que les élèves de ces groupes risquent de se sentir frustrés au cours du débat et donc ne pas s'y impliquer. Lorsqu'il n'est pas possible d'avoir la totalité des messages dans le temps imparti, on peut imaginer de créer un jury avec les élèves qui n'ont pas produit de message.)
Je rappelle l'enjeu. J'enregistre les débats au magnétophone.
La mise en commun :

Je propose à un rapporteur du premier groupe de passer au tableau, d'afficher son message et de le commenter.
Tracer les parallèles à D et D' qui passent par M (la parallèle à D coupe D'en I ; la parallèle à D' coupe D en J). Rechercher le milieu de $[IJ]$ Tracer la droite passant par M et par le milieu de $[IJ]$.



F (pour le désigner par son initiale) commente ce message en refaisant la figure au tableau.
Je demande alors à F d'apporter des arguments pour convaincre ses camarades. Il suggère que toute la classe essaie de refaire la figure proposée. J'invite chacun à préciser ce qu'il pense de ce message.
Très rapidement des contestations apparaissent :
« Suivant la position de M, I et J n'existent pas toujours sur la feuille. »
Le groupe a beaucoup de peine à comprendre cette objection. Finalement, c'est moi qui, en reprenant une explication d'un élève, arrive à les convaincre ! Je suggère alors que la classe se prononce sur ce message dans le cas où les points I et J existent.
Voici des extraits des dialogues entre les élèves :
L (membre du groupe) : « En regardant ce qu'il y a en dehors de la feuille, on voit qu'il existe un parallélogramme, et on a vu que les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. [IJ], c'est une diagonale. Pour trouver l'autre il suffit de prendre le milieu de [IJ] et de tracer, ça vous donne, sans regarder, le prolongement »
Prof : « Vous êtes d'accord ? »
Certains élèves semblent convaincus, d'autres pas. à noter que les élèves convaincus essaient de convaincre les récalcitrants, même s'ils ne font pas partie du groupe émetteur.
Prof : « Qui n'est pas convaincu ? »
Une élève (Ma) lève la main mais ne prend pas tout de suite la parole.
E : « C'est une démonstration. »
E' : « Ça marchera toujours puisque les diagonales se coupent en leur milieu. »
Ma : « II faudrait démontrer que c'est un parallélogramme. »
E : « On a les propriétés » (II fait référence aux propriétés vues l'an dernier.)
F : « Là, il y a deux parallèles, celle-ci et celle-ci, donc théoriquement si on trace entre ces deux parallèles la diagonale, c'est obligé que ça soit le milieu parce qu'il y a... On peut voir un parallélogramme, donc les diagonales comme elles se coupent en leur milieu... »
Finalement Ma n'est pas convaincue. Sa « non-conviction » semble sincère.
Fin de la première séance de 2 heures.

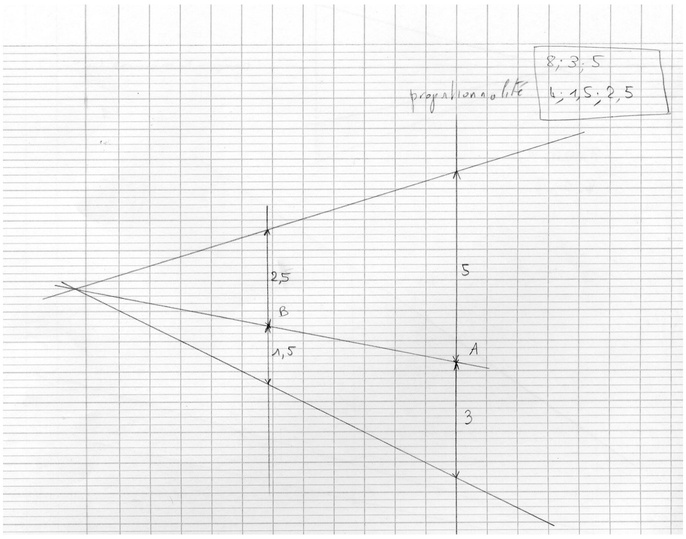
4.2 En première L

Voici un extrait succinct de compte rendu d'une séance d'une heure menée avec un groupe de quatre élèves d'une classe de spécialité mathématique de première L. Cet extrait n'a d'autres

objectifs que de pointer les variables didactiques liées au lancement de l'activité.
Cette activité a été mise en œuvre la dernière séance avant les vacances de Noel 2007.
Le lancement du temps de recherche a été le suivant :
Le professeur oralise le problème en l'illustrant en même temps au tableau :
« Sur une feuille sont tracées deux droites D et D' et un point M. Les deux droites sont sécantes en dehors de la feuille en O. Est-il possible de tracer la droite (MO) ? »
Aucun support n'est donné aux élèves qui utilisent le matériel qu'ils désirent.
Ce type de lancement a de nombreuses conséquences. L'absence de support, la liberté d'utilisation de tout matériel va ici favoriser certaines procédures.

- Certains élèves éprouvent le besoin de demander comment ils doivent placer leurs droites et le point M. Lorsque l'enseignant précise que le problème est posé pour un point M quelconque, certains élèves s'empressent de placer M en un emplacement favorable. L'universalité est ici à travailler.
  Les autres, qui utiliseront les mesures, s'arrangent pour obtenir comme nous le verrons plus loin des mesures de longueur entières.
- Le support n'ayant pas été imposé, les élèves sortent tous une feuille quadrillée. Conséquence immédiate : la direction du grand bord de la feuille est privilégiée. Les productions montrent toutes l'utilisation de cette direction.
- Tous les instruments étant autorisés, les élèves de ce groupe ont majoritairement sorti leur règle graduée et travaillé avec des mesures (il se trouve par ailleurs qu'une élève particulièrement convaincante a su entraîner l'ensemble du groupe dans cette voie).

Avant d'aller plus loin, présentons une production caractéristique de ce groupe.
Il s'agit pour cette élève de tracer (AO). Cet essai n'est pas le premier, mais on constate sur tous que sur la « verticale » les mesures des différents segments sont entières ou demi-entières. Ici (8 ; 5 et 3)



Les 55 minutes ne suffiront pas pour qu'une preuve claire soit élaborée.
Les explications produites convaincront 2 élèves sur trois. Une des élèves restera sceptique.
Sur la production précédente figure le mot proportionnalité. Ce fut apparemment une idée forte du groupe mais sans que ceci ne soit relié à une propriété géométrique. Un complément d'expérimentation serait nécessaire pour savoir si ce contexte de la mesure revient fréquemment ou non dans cette situation et si la proportionnalité ne permet pas un rebond.
Remarque : la piste ouverte par le groupe permettrait éventuellement de travailler plusieurs points, après avoir mesuré les segments de longueur (8 ; 5 ; 3) les élèves cherchent à tracer un

segment parallèle au premier, qui délimité par les deux droites a pour mesure $8/2 = 4$.
Cette difficulté n'a pas été approfondie et aurait peut-être permis de progresser. Ils placent ensuite le point B sur ce nouveau segment pour avoir le triplet de mesures (4 ; 2,5 ; 1,5). Il reste à prouver que O, B et A sont alignés ! par exemple en utilisant le théorème de Thalès.