Pavages archimédiens du plan
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

12 juillet 2020

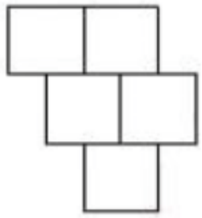
Table des matières

1 Énoncé du problème

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

2 Scénario(s) dans la classe

2.1 Énoncé et consignes

Pour une mise en œuvre plus simple on prendra l'énoncé proposé ci-dessus.
Une autre mise en œuvre est tout à fait possible en demandant simplement aux élèves de **chercher comment paver le plan avec des polygones réguliers**. Cette question nécessite toutefois l'organisation collective de choix en cours de recherche pour se définir, choix après choix, les pavages archimédiens.

2.2 Scénario

2.2.1 Le lancement de la séance

- Projection de l'énoncé, relecture, premières questions

P : Qu'est ce que c'est que Pavage. Ben oui, qu'est-ce que c'est qu'un pavage ? Est-ce que quelqu'un a une idée de qu'est-ce que c'est qu'un pavage ?
E : Mettre des pavés sur un carrelage
P : Mettre des pavés sur un carrelage, OK. Ben, ça ça peut être un pavage.

P : OK, est-ce-que ça va ? ... Quel mot pose problème ?
E : Convexe.
P : Est-ce-que quelqu'un peut expliquer ce que ą veut dire, convexe.

E : Ben Archimédien ça pose problème.
P : Ben c'est la définition, c'est normal que ce soit le mot que tu connais pas.
E : Ahaha.
P : Donc, le mot que tu connais pas c'était archimédien, donc c'est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Ouais ?

E : Du coup ça veut dire quoi, sans superposition ?

P : Ben, tout-à-l'heure euh, Axel a dit carrelage. Imagine un carrelage ou y'ait un trou ...

E : ben ça serait pas un carrelage.

P : C'est bon ? Donc ensuite, qu'est-ce qu'on nous dit ? Flavie ?

E : On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme la figure ci-dessous.

P : Donc vous ... voilà. Donc pourquoi est-ce-qu'on l'exclut celui-ci, c'est bon ? Ouais ?

E4 : Ah, parce que c'est pas aligné ?

P : Ben on te dit on l'exclut parce qu'un sommet appartient au sommet d'un autre. Donc en fait on veut que les sommets ils soient comment finalement ?

Des élèves : Qui coÃ¯ncident.

P : Voilà. On veut que euh, les sommets coÃ¯ncident. Donc le but, du travail qu'on va faire aujourd'hui, c'est de déterminer TOUS les pavages archimédiens du plan. Donc je vous redonne l'énoncé, je vous laisse 5 minutes pour réfléchir tout seul ...

2.2.2 Phase 3 : Recherche collective

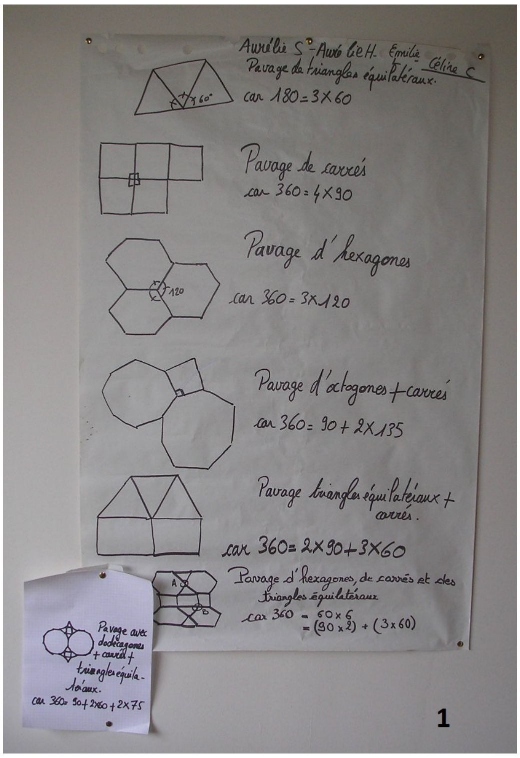
2.2.3 Phase 4 : Rédaction d'une affiche

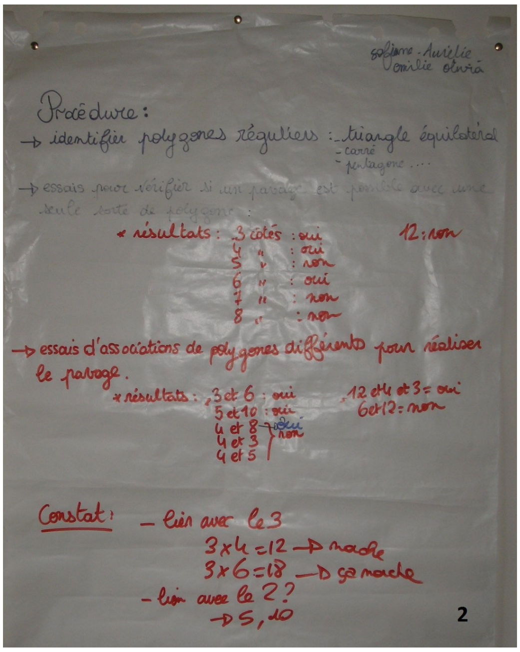
2.2.4 Phase 5 : Présentation des résultats de chaque groupe et débat de validation

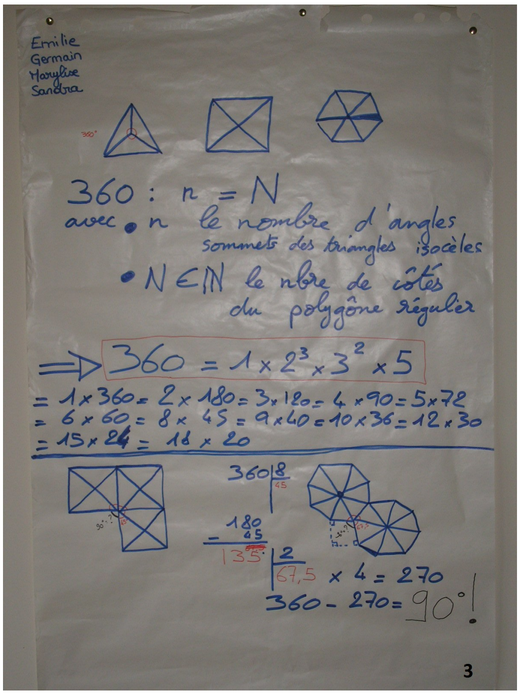
2.2.5 Phase 6 : Synthèse collective

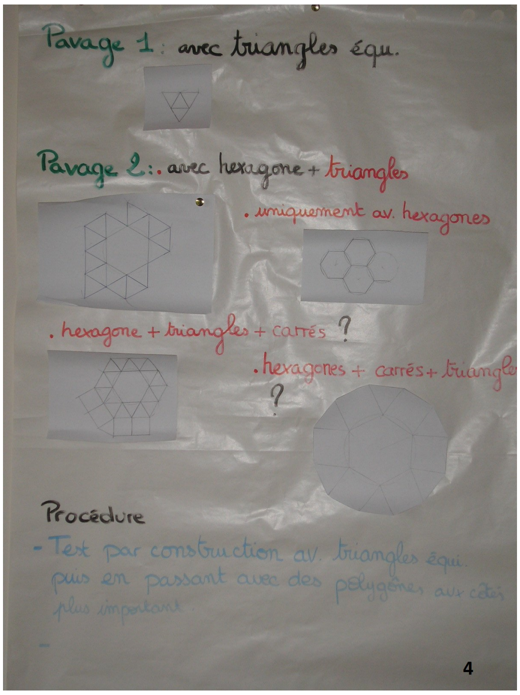
2.2.6 Phase 7 : Institutionnalisation

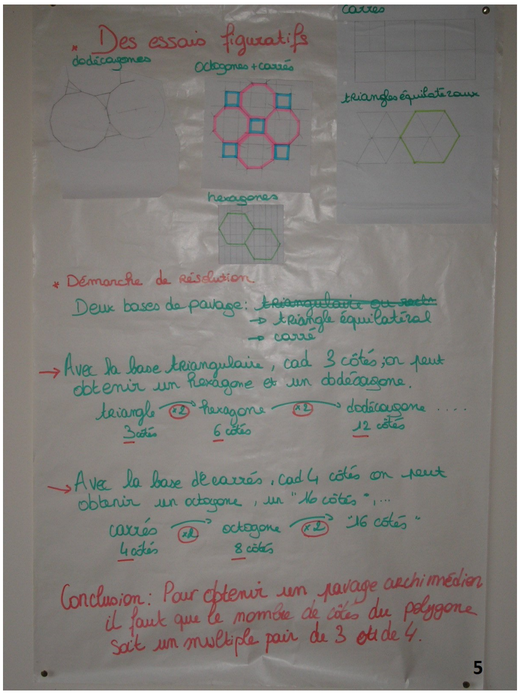
3 Production(s) d'élève(s)

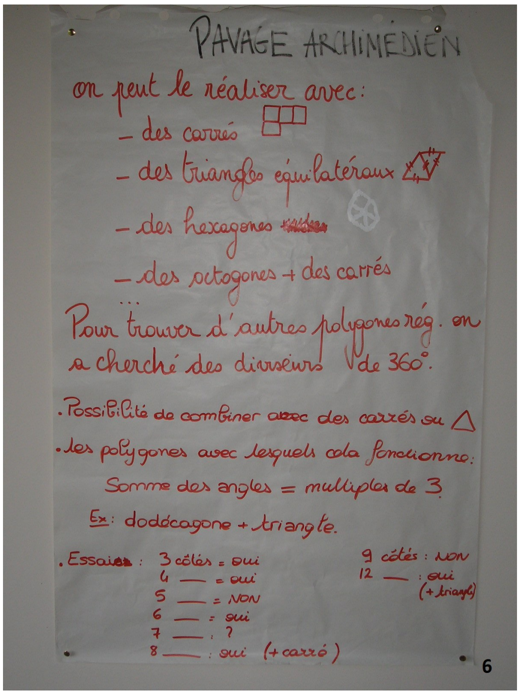


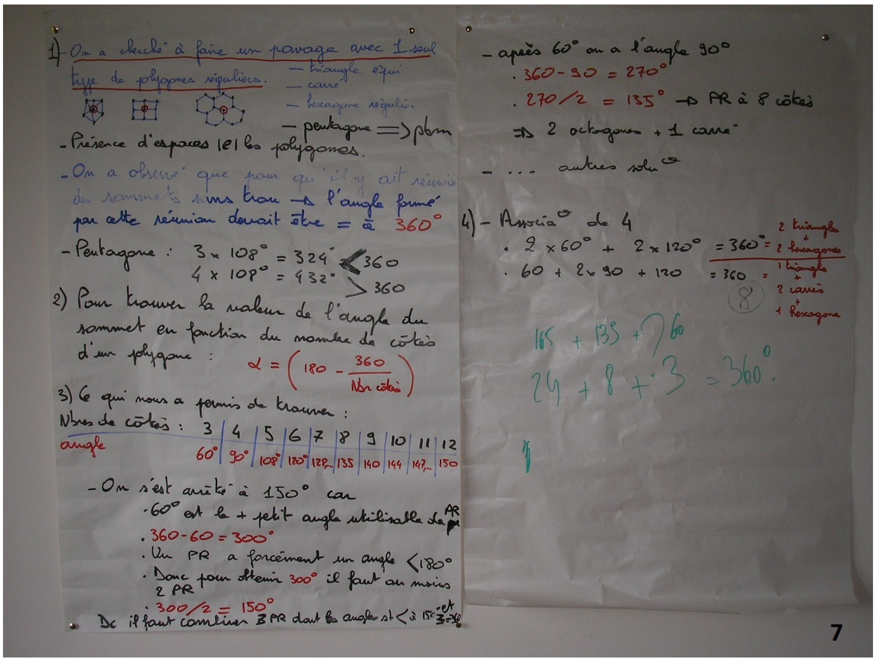


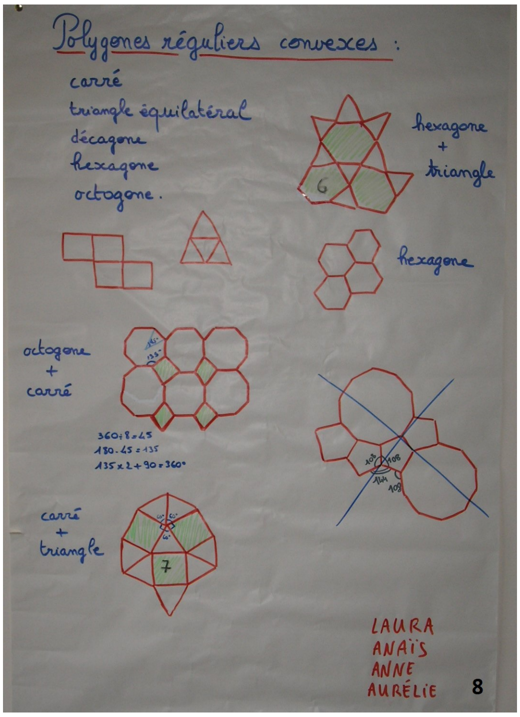

Emilie
Germain
Marylise
Sandra
360 : n = N
avec • n le nombre d'angles sommets des triangles isocèles
• N ∈ ℕ le nbre de côtés du polygône régulier
⟹ 360 = 1 × 2³ × 3² × 5
= 1×360 = 2×180 = 3×120 = 4×90 = 5×72
= 6×60 = 8×45 = 9×40 = 10×36 = 12×30
= 15×24 = 18×20
360 | 8
180
135°
67,5 × 4 = 270
360 - 270 = 90° !
3

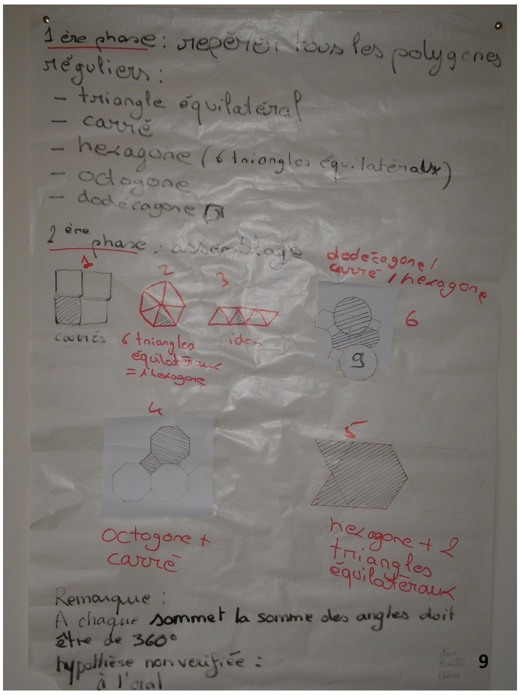

Pavage 1 : avec triangles équ.
Pavage 2 : avec hexagone + triangles
. uniquement av. hexagones
. hexagone + triangles + carrés ?
. hexagones + carrés + triangles ?
Procédure
- Test par construction av. triangles équi. puis en passant avec des polygones aux côtés plus important
4

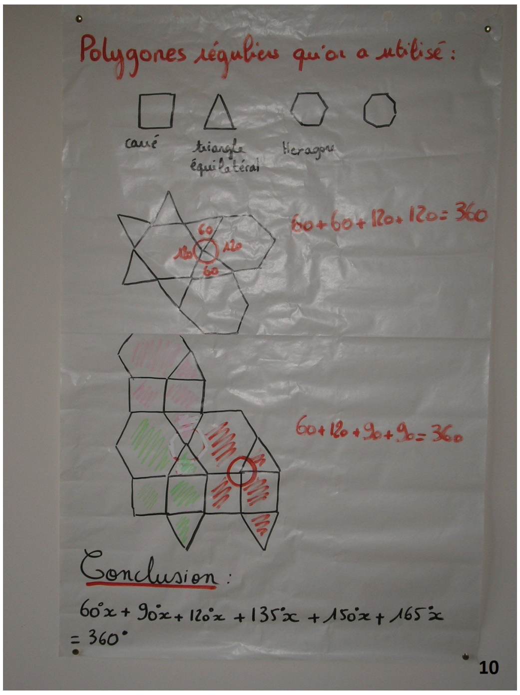

* Des essais figuratifs
dodécagones
octogones + carrés
carrés
triangles équilatéraux
hexagones
* Démarche de résolution
Deux bases de pavage : → triangle équilatéral → carré
→ Avec la base triangulaire, cad 3 côtés, on peut obtenir un hexagone et un dodécagone.
triangle ×2 hexagone ×2 dodécagone ....
3 côtés 6 côtés 12 côtés
→ Avec la base de carrés, cad 4 côtés on peut obtenir un octogone, un "16 côtés", ...
carrés ×2 octogone ×2 "16 côtés"
4 côtés 8 côtés
Conclusion : Pour obtenir un pavage archimédien il faut que le nombre de côtés du polygone soit un multiple pair de 3 et de 4.
5

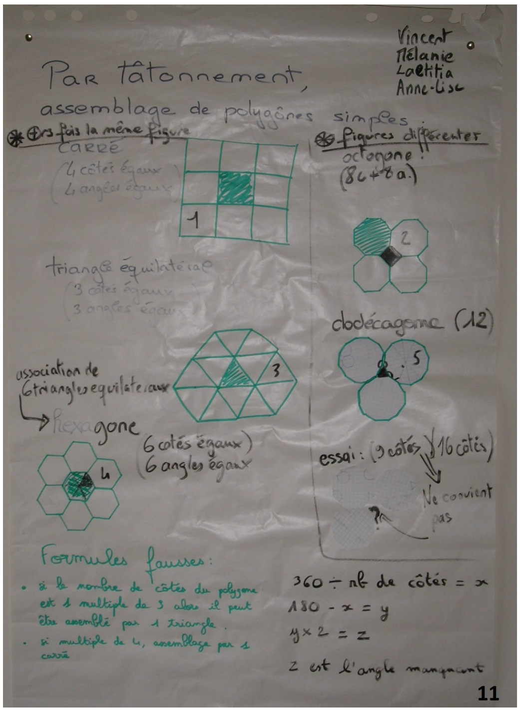

PAVAGE ARCHIMÉDIEN
on peut le réaliser avec :
– des carrés
– des triangles équilatéraux
– des hexagones
– des octogones + des carrés
...
Pour trouver d'autres polygones rég. on a cherché des diviseurs de 360°.
. Possibilité de combiner avec des carrés ou △
. les polygones avec lesquels cela fonctionne :
Somme des angles = multiples de 3
Ex : dodécagone + triangle.
. Essais : 3 côtés = oui
4 — = oui
5 — = NON
6 — = oui
7 — : ?
8 — : oui (+ carré)
9 côtés : NON
12 — : oui (+ triangle)
6


1) On a cherché à faire un pavage avec 1 seul type de polygones réguliers.
— triangle équi
— carré
— hexagone régulier
— pentagone ⟹ pbm
- Présence d'espaces entre les polygones.
- On a observé que pour qu'il y ait réunion des sommets sans trou → l'angle formé par cette réunion devait être = à 360°
- Pentagone : 3 × 108° = 324° < 360
4 × 108° = 432° > 360
2) Pour trouver la valeur de l'angle du sommet en fonction du nombre de côtés d'un polygone :
α = (180 - 360/Nbr côtés)
3) Ce qui nous a permis de trouver :
Nbres de côtés : 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
angle 60° 90° 108° 120° 128,.. 135 140 144 147,.. 150
- On s'est arrêté à 150° car
· 60° est le + petit angle utilisable de PR
· 360-60 = 300°
· Un PR a forcément un angle < 180°
· Donc pour obtenir 300° il faut au moins 2 PR
· 300/2 = 150°
Dc il faut combiner 3 PR dont les angles st < à 150° et 3 = 360
- après 60° on a l'angle 90°
· 360-90 = 270°
· 270/2 = 135° → PR à 8 côtés
⟹ 2 octogones + 1 carré
- ... autres solutions
4) - Association de 4
· 2 × 60° + 2 × 120° = 360° = 2 triangles + 2 hexagones
· 60 + 2 × 90 + 120 = 360 = 1 triangle + 2 carrés + 1 hexagone
8
165 + 135 + 60
24 + 8 + 3 = 360°.
7


Polygones réguliers convexes :
carré
triangle équilatéral
décagone
hexagone
octogone.
hexagone + triangle
hexagone
octogone + carré
360÷8=45
180-45=135
135×2+90=360°
carré + triangle
LAURA
ANAÏS
ANNE
AURÉLIE
8


1ère phase : repérer tous les polygones réguliers :
- triangle équilatéral
- carré
- hexagone (6 triangles équilatéraux)
- octogone
- dodécagone
2ème phase : assemblage
carrés
6 triangles équilatéraux = 1 hexagone
idem
dodécagone / carré / hexagone
octogone + carré
hexagone + 2 triangles équilatéraux
Remarque :
A chaque sommet la somme des angles doit être de 360°
hypothèse non vérifiée : à l'oral
9


Polygones réguliers qu'on a utilisé :
carré
triangle équilatéral
hexagone
60+60+120+120=360
60+120+90+90=360
Conclusion :
60°x + 90°x + 120°x + 135°x + 150°x + 165°x = 360°
10


Vincent
Mélanie
Laetitia
Anne-Lise
Par tâtonnement,
assemblage de polygônes simples
plusieurs fois la même figure
figures différentes
carré
(4 côtés égaux, 4 angles égaux)
triangle équilatéral
(3 côtés égaux, 3 angles égaux)
association de 6 triangles équilatéraux
hexagone
6 côtés égaux
6 angles égaux
octogone (8c+8a)
dodécagone (12)
essai : (9 côtés) (16 côtés)
Ne convient pas
Formules fausses :
360 ÷ nb de côtés = x
180 - x = y
y × 2 = z
z est l'angle manquant
11

4 Comptes rendus (de l'enseignant)

4.1 La question de la diversité des polygones autour d'un nœud

Dans toutes les expérimentations, il apparait que la phase collective d'appropriation de l'énoncé ne permet pas à tous les groupes de questionner la diversité possible des polygones réguliers autour d'un nœud. Plus globalement, c'est le milieu élaboré qui ne permet pas une adidacticité complète pour tous, dans la phase de recherche.
Il pourrait être envisagé de modifier l'énoncé et de donner un exemple de pavage archimédien non régulier.
Mais il nous parait préférable de privilégier l'intervention du professeur à un moment pertinent, de façon à permettre, ce qui a pu être observé parfois, une élaboration théorique dans un cadre restreint qui semble propice Ã des développements. Ceci favorise également la prise en compte de la diversité des démarches et des conceptions.
Cette intervention peut être envisagée suivant plusieurs modalités : des interventions ponctuelles autant que nécessaires et dans la bonne temporalité ou une mise en commun permettant une première confrontation.
Pour une mise en œuvre retenant ces dernières hypothèses, une dévolution fine du scénario devra être effectuée.

4.2 La question de la familiarité avec les polygones

Il peut être nécessaire de s'assurer, **pour une mise en œuvre dans un temps restreint**, ou pour certains niveaux de classe, que la mesure des angles des polygones réguliers puissent faire parti du milieu objectif des élèves et ne bloque pas l'argumentation, le contrôle de la pertinence des théories élaborées. Il peut également être envisagé pour cela un modèle intégrant plusieurs séances (confère pour aller plus loin).