Le plus grand produit
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Une autre définition de la suite

Partons de l'encyclopédie Sloane. Sous le nom de A000792 une des pages précise quelques propriétés de ce plus grand produit. http://oeis.org/search?q=A000792.
Elle cite une dizaine de définitions différentes du nombre $a(n)$ égal au plus grand produit obtenu avec les partitions de n en somme.
Si pour $n = 0$ on pose $a(0) = 1$, alors nous avons la formule de récurrence :

$$a(n) = max((n - i)a(i) : i < n); a(0) = 1$$

C'est en fait la définition choisie par l'encyclopédie.
Cette définition induit un algorithme qui permet de programmer (ici en python) :

```
def max(liste) :#renvoit le maximum d'une liste
    long=len(liste)
    max=liste[0]
    for i in range(long) :
        if liste[i]>max :
            max=liste[i]
    return max
def suite(n) :
    liste_des_ai=[1]
    liste_au_niveau_j=[1]
    for i in range(1,n) :
        for j in range(i) :
            liste_au_niveau_j.append((i-j)*liste_des_ai[j])
            maxaux=max(liste_au_niveau_j)
            liste_des_ai.append(maxaux)
        liste_au_niveau_j=[1]
    return liste_des_ai
print suite(100)
```

2 Propriétés de la suite des valeurs

Nous n'allons pas donner toutes les propriétés de cette suite, mais en citer quelques unes :

- 1. $a(n)$ est de la forme $2^p\ 3^q$ avec $p \leq 2$, $q \geq 0$ et $2p + 3q = n$ (résultat attendu du problème de recherche).
- 2. $a(n) = 3 \times a(n - 3)$ pour $n > 4$; c'est une formule de récurrence qui peut être remarquée par des élèves.
- 3. $a(n)$ admet pour fonction génératrice (c'est un résultat récent)

$$g(x) = \frac{1 + x + 2x^2 + x^4}{1 - 3x^3} .$$

- 4. $a(n)$ est le nombre d'éléments des plus grands sous-groupes commutatifs du groupe symétrique S_n. Par exemple lorsque $n = 6$, un des plus grands sous-groupes commutatifs est le sous-groupe engendré par (123) et (456), qui est d'ordre 9.

- 5. $a(n)$ est le plus grand nombre de complexité n au sens de la suite A005520. Un nombre a est de complexité n s'il faut au moins n fois le nombre 1 pour écrire a à l'aide de 1, $+$ et $\times$.

Remarques : Si les deux premières propriétés citées sont accessibles aux élèves, les trois dernières ne le sont pas, mais elles montrent cependant la diversité d'objets mathématiques qui peuvent être associées à une même suite.

3 Où la théorie des graphes s'invite

Un graphe G est un ensemble fini de sommets dont certains sont reliés par des arêtes. Une collection non vide de sommets de G forme un graphe complet C si tous les sommets de C sont reliés entre eux. Un graphe complet C est dit maximal par rapport à M si $C \subset M$ et C n'est pas contenu dans tout graphe complet contenu dans M. Si le graphe complet C est maximal par rapport à M alors il forme une clique. La question soulevée par Erdös et Moser était de connaître le nombre maximum $f(n)$ de cliques possibles dans un graphe de n sommets ?

Théorème 1. *Si $n \geq 2$ alors*

$$f(n) = \begin{cases} 3^{\frac{n}{3}} & si\ n \equiv 0[3] \\ 4 \times 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1} & si\ n \equiv 1[3] \\ 2 \times 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} & si\ n \equiv 2[3] \end{cases}$$

La démonstration de ce thórême peut être lue dans l'article de J. W. Moon and L. Moser, On cliques in graphs, Israel J. Math. 3 (1965), 23-28.