Le plus grand produit
Analyse mathématique

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

La solution du problème peut s'exprimer de la façon suivante

- si le nombre est un multiple de 3, le plus grand produit est obtenu en calculant $3 \times 3 \times ... \times 3$ (décomposition en $3 + 3 + ... + 3$; par exemple pour 12 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$)

- si le reste du nombre dans la division par 3 est 1 (« si le nombre est égal à un multiple de 3 plus un », pour reprendre une formulation fréquente des élèves), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times ... \times 3 \times 4$; (décomposition $3 + 3 + ... + 3 + 4$, le 4 obtenu en ajoutant le dernier 3 et 1 ; par exemple pour 10 le plus grand produit est 36 ; $3 \times 3 \times 4$ ou $3 \times 3 \times 2 \times 2$)

- si le reste du nombre dans la division par 3 est 2 (« si le nombre est égal à un multiple de 3 plus 2 »), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times ... \times 3 \times 2$ (par exemple pour 14 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 162$).

La démonstration repose sur des remarques préliminaires :

a. si 0 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est nul.

b. si 1 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est amélioré en ajoutant 1 à un des termes du produit (ex $3 \times 3 \times 4$ au lieu de $3 \times 3 \times 3 \times 1$).

c. si, dans une décomposition additive, tout nombre supérieur ou égal à 5 est décomposé en deux termes supérieurs à 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand que le nombre de départ. En effet, si n est un des nombres de la décomposition, en le remplaçant par $[(n-2)+2]$ on ne change pas la somme, et le produit devient $2 \times (n-2) = 2n - 4 = n + (n-4)$. Or $(n-4)$ est positif si n est supérieur à 4, donc $n + (n-4)$ est supérieur à n, si n est supérieur à 4. Tout nombre n supérieur à 4 (supérieur ou égal à 5) permet d'obtenir un plus grand produit si on le remplace par $2 \times (n-2)$. En appliquant cette propriété, les seuls nombres conservés sont des 3 ou des 2 (puisque $4 = 2x2$).

d. si dans un produit on remplace $2 \times 2 \times 2 = 8$ par $3 \times 3 = 9$, le produit sera plus grand ; donc dès qu'il y a trois 2 dans la décomposition, on remplace $2 \times 2 \times 2$ par 3×3 ; on ne conserve donc parmi les termes du produit que un ou deux 2.

Ainsi, il suffit de s'intéresser aux décompositions additives comportant des 3 et des 2 :

- si $n \equiv 0[3]$ alors $n = 3k$ et le plus grand produit est 3^k.
- si $n \equiv 1[3]$ alors $n = 3k + 1 = 3(k-1) + 3 + 1 = 3(k-1) + 4$ et le plus grand produit est $3^k \times 4$.
- si $n \equiv 2[3]$ alors $n = 3k + 2$ et le plus grand produit est $3^k \times 2$.