

Le plus grand produit  
*Analyse didactique*

Équipe DREAM

12 juillet 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Énoncé du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Variables de la situation</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Connaissances et capacités en jeu</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Procédure(s) élèves</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)</b>	<b>3</b>

# 1 Énoncé du problème

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Une première remarque concernant l'énoncé réside dans la difficulté du terme « décompositions additives » qu'il s'agit d'illustrer avec un ou plusieurs exemples. Il est aussi possible de suggérer aux élèves de faire des essais sur des petits nombres.

## 2 Variables de la situation

L'énoncé lui-même est une variable importante de cette situation. Commencer à donner un exemple, faire le point après un temps de recherche individuel peut permettre de mettre en évidence les premiers constats : 1 ne doit apparaître dans la somme, ce n'est pas nécessairement en utilisant des grands nombres que l'on obtient le plus grand produit,...

Une possibilité d'énoncé à l'école primaire :

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons différentes comme la somme d'entiers, par exemple :  $23 = 11 + 5 + 7$

Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est le plus grand.

Et avec d'autres nombres ?

Utiliser le nombre 23 est intéressant en ce sens qu'il est suffisamment grand pour empêcher la stratégie qui consisterait à trouver au préalable toutes les décompositions additives et renforce la nécessité de raisonner pour obtenir le résultat.

Donner l'énoncé sans explication préalable peut amener à des incompréhensions et à un rejet de la situation comme le montre cet extrait de dialogue dans une classe de seconde :

Prof : Le problème est le suivant : *Le professeur écrit au tableau* : Parmi les décompositions additives...

Élève : déjà, c'est mal parti...

Prof : ...d'un entier naturel, trouvez celle, celle(s) : une ou plusieurs dont le produit des termes est le plus grand.

Élève : j'ai rien compris

Élève : pouvez traduire ?

Élève : ça veut dire quoi ?

Élève : c'est quoi les décompositions additives ?

## 3 Connaissances et capacités en jeu

Les connaissances mathématiques en jeu dans ce problème :

- le vocabulaire et les propriétés des nombres et des opérations,
- la division euclidienne, les congruences,
- 1 est élément neutre de la multiplication,
- 0 est élément neutre de l'addition et élément absorbant de la multiplication,
- décomposition d'un nombre en somme de plusieurs termes,
- raisonnements élémentaires sur les nombres :  $1 \times 1 < 2$ ,  $1 \times 2 < 3$ ,  $2 \times 2 > 1 \times 3$ ...

Les compétences des programmes se retrouvent bien sûr dans ce problème : chercher, raisonner, calculer sont au cœur du travail que les élèves ont à faire : savoir mettre en œuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes,

changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la preuve sont autant des compétences développées dans cette situation.

## 4 Procédure(s) élèves

Les élèves arrivent rapidement à comprendre que 1 ne doit pas se trouver dans la décomposition et sur des exemples à voir que les 3 jouent un rôle important.

Extrait d'un dialogue dans un groupe de seconde :

E1 : Oui, mais y'a un truc aussi ; tu peux en mettre plus aussi mais là, je viens de le faire en décomposant les 3 en mettant des 2 à la place, c'est que, avec ce résultat j'arrive à 3240 et quand, les 3, avec 2 trois je fais... euh trois deux, ça fait 2560, c'est un résultat plus petit, je pense qu'il faut pas descendre en dessous de trois.

E2 : C'est à dire, je pense qu'il faut trouver un maximum de termes, mais les plus grands possibles...

[...]

E1 : Attends, on va essayer avec des 4 ; on va voir ce que ça donne ; quatre fois quatre huit fois quatre douze fois quatre seize fois quatre vingt fois quatre vingt quatre fois deux (Il tape en même temps sur sa calculatrice  $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 2$ ) 8192, ouais...

E2 : Donc c'est avec...

E1 : C'est avec un maximum de 3.

## 5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

Si les élèves cherchent toutes les décompositions additives d'un nombre donné ils risquent de ne pas rentrer dans la situation.

Mais la difficulté essentielle est de transformer la conjecture obtenue dans un théorème démontré. La preuve (voir analyse mathématique) même si elle ne demande pas de connaissances mathématiques importantes est difficile à écrire de façon précise. Dans le groupe observé dont les extraits de dialogue se trouvent dans le paragraphe précédent, la conjecture est arrivé très rapidement mais l'essentiel de la séance a été consacré à une mise en forme de cette conjecture comme en témoigne l'extrait ci-dessous :

E1 : Donc, ben c'est ça, mais maintenant il faut le synthétiser, il faut trouver le plus grand nombre possible et faire que c'est le maximum de trois.

E2 : Ouais il faut...

E1 : Laisse on laisse parler les deux autres là...

E2 : Non mais je sais pas, je réfléchis... Donc les deux c'est pas possible, donc les trois...

E1 : Cinq fois cinq vingt cinq...

E2 : (*dans sa barbe*) et si on fait vingt six divisé par... euh... trois...

E1 : Vingt six divisé par trois tu vas avoir des virgules...

E2 : Oui, mais tu fais... tu trouves, ... égal...

E1 : ça va te servir à quoi ?

E2 : Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept...

E1 : Oui, mais ça m'aide pas...

E2 : On peut trouver une équation avec...

E1 : Non, là j'crois pas...

E2 : Ah mais j'sais pas, j'suis parti comme ça...

E1 : Je pense qu'il faut qu'on arrive à trouver une équation maintenant

E2 : Oui, ben voilà...faire une équation

E1 : Donc,...tu vois elle est très bien mon équation ; on voit pas grand chose mais elle est super bien mon équation...Non? (*il montre sa feuille blanche*)

E2 : (*Rire*) non alors vingt six divisé par ...

E1 : T'es pas obligé de prendre vingt six, vingt six c'est un exemple

E2 : Oui, mais on peut continuer sur cet exemple...Je trouve ça bien moi...

E1 : Si tu veux, si ça peut te faire plaisir...

On voit ici une certaine forme de démobilitation parce que la formalisation du résultat est difficile à écrire.