Les urnes de Pòlya
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

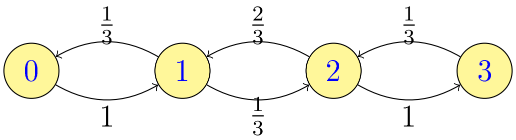
Une urne contient une boule rouge et une boule noire indiscernables au touché. L'expérience aléatoire consiste à extraire une boule de l'urne et à la remettre dans l'urne et ajouter une boule de même couleur.
On réitère cette expérience.
Étudier la composition de l'urne.

2 Ouvertures mathématiques

Ce problème a été largement étudié et notamment en partant d'une composition d'urne avec a boules blanches et b boules noires, en modifiant le nombre de boules qu'on rajoute ou qu'on enlève de l'urne.
On peut lire, bien sûr, l'article original de Pòlya :
Pòlya, G. (1930). Sur quelques points de la théorie des probabilités, *Annales de l'IHP*, tome 1, n°2,117-161
Mais aussi un article, en anglais, de Robin Pemantle qui s'interroge sur les processus aléatoires avec renforcement :
Pemantle, R. (2007). A survey of random processes with reinforcement, *Probability Surveys*, vol. 4, 1-79
Une autre façon de prolonger peut aussi être de considérer d'autres problèmes d'urnes, comme le modèle des urnes d'Ehrenfest.
On considère au départ deux urnes A et B dont la première contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard un nombre entre 1 et n et on change d'urne la boule ainsi déterminée.
On itère, bien sûr, l'expérience.
Quelle est la composition de l'urne à terme ?
Tout comme pour les urnes de Pòlya on peut faire une simulation, ici en Python :

```
def init(n):
    global urnA
    urnA=list(range(1,n+1))
    global urnB
    urnB=[]
def ehrenstein(n):
    has=random.randint(1,n)
    if has in urnA:
urnB.append(has)
urnA.remove(has)
    else:
urnA.append(has)
urnB.remove(has)
    return

def expe_ehrensein(nombre,n):
    init(n)
    for i in range(nombre):
ehrenstein(n)
    return len(urnA), len(urnB)
```




```
for i in range(100):
    print expe_ehrensein(10000,500)
```

Cette simulation donne comme résultats :

(246, 254)	(268, 232)	(256, 244)	(226, 274)	(246, 254)	(260, 240)	(234, 266)	(244, 256)
(236, 264)	(248, 252)	(244, 256)	(228, 272)	(244, 256)	(250, 250)	(250, 250)	(242, 258)
(260, 240)	(260, 240)	(250, 250)	(242, 258)	(248, 252)	(274, 226)	(252, 248)	(260, 240)
(238, 262)	(242, 258)	(260, 240)	(262, 238)	(264, 236)	(254, 246)	(254, 246)	(266, 234)
(238, 262)	(262, 238)	(242, 258)	(242, 258)	(240, 260)	(260, 240)	(252, 248)	(250, 250)
(246, 254)	(266, 234)	(248, 252)	(246, 254)	(230, 270)	(242, 258)	(262, 238)	(242, 258)
(258, 242)	(272, 228)	(236, 264)	(242, 258)	(232, 268)	(246, 254)	(252, 248)	(224, 276)
(272, 228)	(230, 270)	(244, 256)	(272, 228)	(254, 246)	(252, 248)	(250, 250)	(230, 270)
(268, 232)	(228, 272)	(280, 220)	(262, 238)	(234, 266)	(242, 258)	(242, 258)	(242, 258)
(252, 248)	(254, 246)	(252, 248)	(262, 238)	(250, 250)	(256, 244)	(232, 268)	(272, 228)
(240, 260)	(252, 248)	(256, 244)	(222, 278)	(234, 266)	(256, 244)	(270, 230)	(250, 250)
(244, 256)	(250, 250)	(246, 254)	(244, 256)	(280, 220)	(256, 244)	(246, 254)	(240, 260)
(250, 250)	(246, 254)	(254, 246)	(262, 238)				

On peut voir que les deux urnes semblent être à terme équilibrées.
Comment peut-on trouver mathématiquement ce résultat ?
La première urne (urne A) suffit à décrire entièrement le système, en effet, si elle contient p boules, la deuxième (urne B) urne en comptera $n-p$. Il y a donc exactement n états différents si on considère le nombre de boules dans chaque urne.
Pour passer d'un état i à un état j il faut au moins $|i-j|$ étapes puisque on rajoute ou on enlève une boule à la fois. La probabilité de passer de l'état i à l'état j est nulle dès que $|i-j| > 1$. La probabilité de passer de l'état i à l'état $i-1$ vaut $\frac{i}{n}$. La probabilité de passer de l'état i à l'état $i+1$ vaut alors $\frac{n-i}{n}$.
On peut donc représenter la dynamique par une chaîne de Markov, puisque l'état à l'étape k ne dépend que de l'état précédent. Par exemple, supposons que l'urne A contienne à l'origine 3 boules :
Ainsi la matrice de transition est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver l'état stable on résout le système d'équations :

$$(x,y,z,t) = (x,y,z,t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $x+y+z+t=1$. Ce qui donne :

$$X = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$$

où l'on reconnait les probabilité de la loi binomiale $B(3, \frac{1}{2})$
Que se passe-t'il avec n boules ?

3 Prolongements didactiques

Les problèmes d'urnes peuvent être considérés comme des modèles de problèmes de probabilité sur un univers fini. On peut à tout moment, retraduire un énoncé en terme de tirage dans une urne. Les tirages possibles sont les tirages avec remise, sans remise et simultanés qui donnent des modèles différents de dénombrement.

Dénombrements

Lorsque l'hypothèse d'équiprobabilité est faite, calculer la probabilité de l'événement A dans l'univers Ω revient à déterminer le nombre d'éléments de A et de Ω.

Deux principes de base

Principe de la somme : lorsque un ensemble fini E peut être décomposé comme la réunion d'ensemble A_1, A_2, $\cdots$, A_p disjoints, le nombre d'éléments de E est la somme des nombres d'éléments des ensembles A_i.
Principe du produit : Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, $n-2$, $\cdots$, n_p possibilités qui ne dépendent que du numéro de l'étape, alors le nombre total de possibilités est obtenu en effectuant le produit des n_i.
Exemples :

1. Combien peut on écrire de nombres de trois chiffres tous distincts ?
2. Combien y-a-t'il de tiercés dans l'ordre dans une course de 18 chevaux ?
3. Combien peut-on former de codes distincts en utilisant 5 lettres de l'alphabet ?

Le principe de liste

Soit E un ensemble de n éléments. Une suite ordonnée de p éléments de E s'appelle une p-liste d'éléments de E ou une liste à p éléments de E.
Si de plus les éléments de la liste sont distincts, on parle de p-liste sans répétition et dans ce cas $p \leq n$
Résultat :
Le nombre de p-listes de E est n^p
Le nombre de p-listes sans répétition de E est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$
La preuve est une application du principe multiplicatif.
Exemple : Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Combien y-a-t'il de choix possibles de 3 boules :

1. sachant qu'on ne remet pas la boule choisie dans l'urne
2. sachant qu'on remet la boule choisie dans l'urne

Remarque : une n-liste sans répétition dans un ensemble à n éléments s'appelle une permutation de E. Il y en a $n!$

Combinaisons

Soit E un ensemble fini de n éléments, et p un nombre inférieur tel que $0 \leq p \leq n$. Un sous-ensemble de E ayant p éléments s'appelle une combinaison de p éléments de E. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté :

$$C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve :
Pour construire les p-listes d'éléments distincts de E, on peut procéder en deux étapes :
Choisir une partie de E : il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ possibilités.
Classer les p éléments de la partie : il y a $p!$ classements
or on sait qu'il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ p-listes sans répétitions ; donc :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} p!$$

donc

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple : Combien y-a-t'il de tirages de 6 numéros parmi 49 (loto) ?

$$\begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix} = 13983816$$

Combien y-a-t'il de mains de cinq cartes dans un jeu de 32 cartes ?

$$\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour chacun des énoncés ci-dessous, donner un énoncé équivalent sous forme de tirages de boules dans des urnes.

1. Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange et rouge. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino (c'est un double). On choisit trois dominos.
2. Un dé porte les numéros : -3, -2, -1, +1, +2, +3. Le couple (b,c) est obtenu en jetant deux fois le dé : b est le premier résultat, c est le second.
3. On dispose d'un cube en bois de 3cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces en 27 cubes d'un cm d'arête. Chacun de ces cubes a zéro, une, deux ou trois faces peintes. On tire au hasard un de ces 27 cubes. On tire au hasard deux cubes simultanément.
4. Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties. Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle. A chaque partie, l'équipe A a la probabilité 0,5 de gagner, l'équipe B a une probabilité 0,4 de gagner et la probabilité que la partie soit nulle est 0,1.

Réponses

1. Le nombre de dominos est de 28. En effet, pour fabriquer un domino bicolore, je dois choisir un ensemble de 2 éléments dans un ensemble à 7 élément (2 couleurs parmi 7), soit $C_7^2 = 21$ et il y a 7 dominos "double" (Un par couleur).

   Il y a donc 28 dominos, soit 28 boules dans une urne, en choisir 3 revient à former un sous ensemble à trois éléments d'un ensemble à 28 éléments. L'univers de cette expérience compte donc $C_{28}^3 = 3276$ éléments.
2. On place dans une urne 6 boules notées -3, -2, -1, +1, +2, +3. On tire de cette urne une boule, on note son numéro et on la replace dans l'urne. On tire une seconde fois et on note le numéro. Le résultat de cette expérience est un couple dont chaque élément appartient à l'ensemble {-3, -2, -1, +1, +2, +3 }. Il y en a : 6^2.
3. On place dans une urne 27 boules : 8 portent le numéro 3 (8 cubes ont 3 faces peintes), 12 portent le numéro 2 (les cubes qui ont 2 faces peintes), 6 portent le numéro 1 (les cubes qui ont 1 face peinte) et 1 porte le numéro 0 (le cube dont aucune face n'est peinte). On choisit au hasard un boule de cette urne. Le cardinal de l'univers est de 27. On tire simultanément deux cubes : un résultat est un sous ensemble de deux éléments d'un ensemble à 27 éléments ; il y en a C_{27}^2.
4. On place dans unes urne 10 boules : 5 notées A, 4 notées B et 1 notée N. On tire de cette urne successivement 3 boules avec remise. L'univers est donc l'ensemble des 3-listes avec répétition pris dans un ensemble à 10 éléments. Il y en a 10^3.