Cahier d'un élève de 3ème2

Année scolaire 2015-2016

Les nombres trapézoïdaux

Enoncé :

Quels sont les nombres entiers naturels* qui sont somme d'au moins 2 entiers consécutifs* ?

* Ce sont les nombres entiers positifs : 0, 1, 2 ...

* Ce sont des entiers qui se suivent : 1 ; 2 ; 3 ou 4 ; 5 ou 23 ; 24 ; 25 ; 26 etc...

Impairs

	Table de 3	Que des pairs 0 ; 4, 8 ; 2 ; 6 ... +4
1 + 2 = 3	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 + 4 = 10
2 + 3 = 5	2 + 3 + 4 = 9	2 + 3 + 4 + 5 = 14
3 + 4 = 7	3 + 4 + 5 = 12	3 + 4 + 5 + 6 = 18
4 + 5 = 9	4 + 5 + 6 = 15	4 + 5 + 6 + 7 = 22
5 + 6 = 11	5 + 6 + 7 = 18	5 + 6 + 7 + 8 = 26
6 + 7 = 13	6 + 7 + 8 = 21	6 + 7 + 8 + 9 = 30
7 + 8 = 15	7 + 8 + 9 = 24	7 + 8 + 9 + 10 = 34
8 + 9 = 17	8 + 9 + 10 = 27	8 + 9 + 10 + 11 = 38
9 + 10 = 19	9 + 10 + 11 = 30	9 + 10 + 11 + 12 = 42
		10 + 11 + 12 + 13 = 46

Bilan de la recherche : conjectures utiles

① Tous les nombres impairs sont des nombres trapézoïdaux (ils sont la somme de 2 entiers consécutifs).

② Un nombre trapézoïdal peut avoir plusieurs décompositions.

③ Tous les multiples de 5 sont des nombres trapézoïdaux (ils sont la somme de 5 entiers consécutifs).

④ Tous les multiples de 3 sont des nombres trapézoïdaux (ils sont la somme de 3 entiers consécutifs).

⑤ On ne trouve pas de décomposition pour 0, 2, 4 et 16.

Etude 1. Vérification des conjectures émises.

~~④ Comme les 2 termes sont consécutifs, il y a forcément 1 pair et 1 impair, donc le résultat est impair~~

① La conjecture semble être vraie. Il faut la démontrer.

2 pistes

n°1 • La somme de 2 entiers consécutifs est toujours impair : $0+1=1$; $1+2=3$; $2+3=5$ ... 1ère somme

n°2 • Méthode pour trouver la décomposition d'un nombre impair.

- on prend un nombre impair — 65
- on divise par 2 — 32,5
- on prend l'entier supérieur et l'entier inférieur — 32 et 33
- on obtient 2 entiers consécutifs. — $32+33=65$

Piste n°1 :

$0+1=1$

$1+2=3$

$2+3=5$

$3+4=7$

$+2$; 2×3

$1, 3, 5, 7, 9, 11$

$2\times0+1$, $2\times1+1$, $2\times2+1$, $2\times3+1$, $2\times4+1$, $2\times5+1$

7	163	2 x entier + 1
3,5	81,5	entier + 0,5
3 et 4	81 et 82	entier et entier + 1
$3+4=7$	$81+82=163$	$\boxed{2 \times \text{entier} + 1}$

Exemples

Nombre impair

= entier + entier + 1

2 entiers consécutifs

Preuve

$\boxed{\text{Nb impair} = 2 \times \text{entier} + 1}$

$\boxed{\text{Nb pair} = 2 \times \text{entier}}$

La piste n°1 est prouvée

② $3+4+5=12$; $7+8+9=24$ | $(x-1)+x+(x+1)=x\times3$

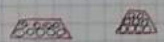
$x = x \quad x = x\times3$

③ $7+8+9+10+11=45$; $5+6+7+8+9=35$ | $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=x\times5$

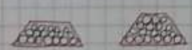
③ On choisit un multiple de 5	$\boxed{45}$	$\boxed{x\times5}$
On divise par 5	9	x
On enlève 2, on enlève 1 et on rajoute 1, on rajoute 2 au résultat	7, 8, 9, 10, 11	$x-2$; $(x-1)$ et $(x+1)$; $(x+2)$
On obtient la décomposition	$7+8+9+10+11=\boxed{45}$	$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)$ $=\boxed{x\times5}$

Pour démontrer une conjecture sur les nombres, on utilise une lettre ou un mot pour généraliser. On appelle cela le calcul littéral

④ $4+5=9$ / $2+3+4=9$



$5+6+7=18$ / $3+4+5+6=18$



⑤ Pas de décomposition pour 0, 2, 4 et 16.

0 : pas possible.

2 : $0+1=1$; $1+2=3$ → pas possible.

4 : $1+2=3$; $2+3=5$ → pas possible

8 : $3+4=7$; $2+3+4=9$; $4+5=9$ → pas possible

16 : $4+5+6=15$; $7+8=15$; $8+9=17$ → pas possible

On a prouvé que 0, 2, 4, 8 et 16 n'étaient pas trapézoïdaux.

29 = 14 + 15

34 = 7 + 8 + 9 + 10

32 ✗

64 ✗

128 ✗

tous les nombres de la table de 2 qui ne sont pas dans une autre table.

2

$4 = 2 \times 2 = \boxed{2^2}$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = \boxed{2^3}$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{2^4}$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{2^5}$

$64 = \boxed{2^6}$

$128 = \boxed{2^7}$

Toutes les puissances de 2 ne sont pas des nombres trapézoïdaux.

↳ ⚠ Cette conjecture ne sera pas démontrée.

Etude 2. Où en est-on dans la résolution du problème ?

Les multiples de 7 sont-ils trapézoïdaux ?

Les multiples de 9 sont-ils trapézoïdaux ?

↳ conjecture + preuve.

x désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On choisit un multiple de 7	28	$x \times 7$
On le divise par 7	4	x
	$1+2+3+\boxed{4}+5+6+7=28$	$(x-3)+(x-2)+(x-1)+\boxed{x}+(x+1)+(x+2)+(x+3)=x\times 7$

Tous les multiples de 7 sont donc trapézoïdaux supérieurs à 21.

On choisit un multiple de 9	54	$x \times 9$
On le divise par 9	$\boxed{6}$	$\boxed{x}$
	$2+3+4+5+\boxed{6}+7+8+9+10=54$	$(x-4)+(x-3)+(x-2)+(x-1)+\boxed{x}+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=x\times 9$

Les multiples de 3 sont trapézoïdaux donc ceux de 9 aussi.

Nombres impairs

Multiples de 3.

Multiples de 5

Multiples de 7 > 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	? 14	15	16	17	18	19	20
21	? 22	23	24	25	? 26	27	28	29	30
31	32	33	? 34	35	36	37	? 38	39	40
41	42	43	? 44	45	? 46	47	48	49	50
51	? 52	53	54	55	56	57	? 58	59	60
61	? 62	63	64	65	66	67	? 68	69	70
71	72	73	? 74	75	? 76	77	78	79	80
81	? 82	83	84	85	? 86	87	? 88	89	90
91	? 92	93	? 94	95	96	97	98	99	100

Conclusion

- Les puissances de 2 ne sont pas des nombres trapézoïdaux.
- Les nombres impairs et les multiples de 3, 5, 7 sont des nombres trapézoïdaux
- Il y a des nombres pour lesquels on n'a pas trouvé de méthode (ex. 14, 22, 26, 34 etc).

Etude 3. Programmes de calculs et calcul littéral

Voici deux programmes de calculs

Programme 1					Programme 2				
- On choisit un nombre	1	2,5	-11	x	- On choisit un nombre	1	2,5	-11	x
- On multiplie par 6	6	15	-66	$6x$	- On soustrait 2	6	15	-13	$x-2$
- On soustrait 12	-6	3	-78	$6x-12$	- On multiplie par 6	-6	3	-78	$(x-2)\times 6$

Faites des essais avec ces deux programmes de calculs. Que remarquez-vous ? Prouvez-le.

1) $99 \to 582$ 2) $99 \to 582$

$78 \to 456$ $78 \to 456$

Pour le même nombre de départ, on trouve le même résultat.

$(x \times 6) - 12 = y$ et $(x-2) \times 6 = y$

$6x - 12 = (x-2) \times 6$?

Conjecture : les deux programmes de calculs donnent toujours les mêmes résultats.

Preuve : $6 \times x - 12 = (x-2) \times 6$?

$6 \times x - 12 = 6 \times x - 6 \times 2$ formule de distributivité.

$= 6 \times (x - 2)$

La conjecture est démontrée

Formule de distributivité
Si a, b et c désignent des nombres.
$a \times (b+c) \underset{\text{développe}}{\overset{\text{factorise}}{=}} a \times b + a \times c$

Autre forme :

$$\triangle \times (\bigcirc + \square) = \triangle \times \bigcirc + \triangle \times \square$$

Exercice :

Transformer les expressions suivantes à l'aide de la distributivité

- $5 \times (x-3) = 5 \times x - 5 \times 3$
  $= 5x - 15$
- $10 \times (5 + 2x) = 10 \times 5 + 10 \times 2x$
  $= 20x + 50$
- $(4 + x^2) \times 2 = 2 \times x^2 + 2 \times 4$
  $= 2x^2 + 8$
- $10x + 10 = 10(x+1)$
- $20y - 4 = 4 \times (5y - 1)$
- $x(2x+1) = x \times 2x + x \times 1$
  $= 2x^2 + x$

Même exercice avec :

- $4(10 - 3x) = 4 \times 10 - 4 \times 3x$
  $= \underline{-12x + 40}$
- $7x^2 - 3x = \underline{x(7x - 3)}$

Programme 1 :

- On choisit un nombre
- On multiplie par -2
- On soustrait 5
- On multiplie par -7

Programme 2 :

- On choisit un nombre
- On multiplie par 14
- On ajoute 35.

Essais + conjecture + preuve.

1) $42 \times (-2) = -84 \,/\, -84 - 5 = -89 \,/\, -89 \times (-7) = 623$

2) $42 \times 14 = 588 \,/\, 588 + 35 = 623$

1) $34{,}7 \times (-2) = -69{,}4 \,/\, -69{,}4 - 5 = -74{,}4 \,/\, -74{,}4 \times (-7) = 520{,}8$

2) $34{,}7 \times 14 = 485{,}8 \,/\, 485{,}8 + 35 = 520{,}8$

Les résultats sont toujours les mêmes.

$(x \times (-2) - 5) \times (-7)$

$(-2x - 5) \times (-7)$

$-7 \times (-2x) + (-7) \times (-5)$

$14x + 35$

$x \times 14 + 35$

$14x + 35$

Développer :

$A = 4(7x + 2)$

$= 4 \times 7x + 4 \times 2$

$= \underline{28x + 8}$

$B = -6(-2 - 4x)$

$= -6 \times (-2) - 6 \times (-4x)$

$= \underline{12 + 24x}$

$C = 4x(7 - 3x) + 2x$

Développer → Simplifier → $= 4x \times 7 + 4x \times (-3x) + 2x$

$= 28x - 12x^2 + 2x$

Réduire → $= \underline{-12x^2 + 30x}$ ✓

Factoriser :

$C = 48 - 16x$

$= \underline{2(24 - 8x)}$

$D = 49x + 14x^2$

$= \underline{x(49 + 14x)}$

$C = 10x^2 - 10x$

$= \cancel{10x \times x + 10x \times (-x)}$

$= \cancel{10x(x - x)}$

$= x(10x - 10)$ ✓

Scanned by CamScanner

Programme de calcul

On choisit un nombre

On prend le double

On rajoute $\frac{1}{2}$

On multiplie les deux nombres

On soustrait le double du carré du nombre initial

56	32,7	-8,9
112 ; 56,5	65,4 ; 33,2	-17,8 ; -8,4
6328	2 171,28	149,52
56	32,7	-8,9

Le résultat est le nombre de départ.

x désigne un nombre

$(x \times 2) \times (x + \frac{1}{2}) - (x^2 \times 2)$

$= 2x \times (x + \frac{1}{2}) - (x^2 \times 2)$

$= 2x \times x + 2x \times \frac{1}{2} - (x^2 \times 2)$

$= 2x^2 + x - (x^2 \times 2)$

$= 2x^2 + x - 2x^2$

$= \boxed{x}$

Développer :

$A = 4(x+2) - 5(x-3)$

$= 4 \times x + 4 \times 2 - 5 \times x - 5 \times (-3)$

$= 4x + 8 - 5x + 15$

$= \underline{-1x + 23}$

$B = 16(3x-2) + 7(-3x-4)$

$= 16 \times 3x + 16 \times (-2) + 7 \times (-3x) + 7 \times (-4)$

$= 48x - 32 - 21x - 28$

$= \underline{27x - 60}$

Exercice

Développer, Simplifier, réduire

$A = 8(6+7x)$

$= 8 \times 6 + 8 \times 7x$

$= \underline{56x + 48}$

$B = -2(-5x+4)$

$= -2 \times (-5x) - 2 \times 4$

$= \underline{10x - 8}$

$C = 5(2x+3) + 3(4x+2)$

$= 5 \times 2x + 5 \times 3 + 3 \times 4x + 3 \times 2$

$= 10x + 15 + 12x + 6$

$= \underline{22x + 21}$

$D = 6(2x-4) - 3(4-5x)$

$= 6 \times 2x + 6 \times (-4) - 3 \times 4 - 3 \times (-5x)$

$= 12x - 24 - 12 + 15x$

$= \underline{27x - 36}$

$E = (2x-7) - (4x+3)$

$= 1 \times 2x + 1 \times (-7) - 1 \times 4x - 1 \times 3$

$= 2x - 7 - 4x - 3$

$= \underline{-2x - 10}$

$F = 4x - (3x - 2)$

$= 4x - 1 \times 3x - 1 \times (-2)$

$= 4x - 3x + 2$

$= \underline{x + 2}$

Factoriser.

$A = 28x^2 + 4x(x+1)$

$= 28x^2 + 4x \times x + 4x \times 1$

$= 28x^2 + 4x^2 + 4x$

$= 32x^2 + 4x$

$= 32 \times x \times x + 4x$

$= \underline{x(32x + 4)}$

$= 7x \times 4x + 4x(x+1)$

$= 4x(7x + (x+1))$

$= 4x \times (8x + 1)$

$B = 3x(x-1) + 2(x-1)$

$= 3x \times x + 3x \times (-1) + 2 \times x - 2 \times 1$

$= 3x^2 - 3x + 2x - 2$

$= 3x^2 - 1x - 2$

$= \underline{x(3x-1) - 2}$

$= (x-1)(3x+2)$

$C = (7x+1) \times 3x + (x-2)(7x+1)$

$= (7x+1)(3x + (x-2))$

$= (7x+1)(4x-2)$ ✓

$D = 4x(2x-1) - (3-2x)(2x-1)$

$= (2x-1)(4x - (3-2x))$

$= (2x-1)(4x - 3 + 2x)$

$= (2x-1)(6x-3)$ ✓

Programme de calculs.

1) On choisit 3 entiers consécutifs

2) On calcule le carré de celui du milieu

3) On lui soustrait le produit des extrêmes.

Qu'obtient-on ?

16, 17, 18	32, 33, 34
$17^2 = 289$	$33^2 = 1089$
$289 - (16 \times 18)$	$1089 - (32 \times 34)$
$= 1$	$= 1$

On obtient toujours 1 au résultat.

x désigne un entier

$x^2 - ((x-1) \times (x+1))$

$= x^2 - 1 \times (x-1) - 1 \times (x+1)$

$= x^2 - 1x + 1 - 1x + 1$

$= x^2 + 2x$

$=$

$x^2 - (x-1) \times (x+1)$

$= x^2 - (x \times x + x \times 1 - 1 \times x - 1 \times 1)$

$= x^2 - (x^2 + 1x - 1x - 1)$

$= -1$

Preuve

x désigne un nombre entier.

$x-1,\ x,\ x+1$

$x^2 - (x-1)(x+1)$

$= x^2 - [(x+(-1))(x+1)]$

$= x^2 - (x \times x + x \times 1 - 1 \times x - 1 \times 1)$

$= x^2 - (x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1)$

$= x^2 - (x^2 - 1)$

$= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1$

$= \boxed{1}$

Application Développer, simplifier et réduire.

$A = (3x+2)(x+5)$

$= 3x \times x + 3x \times 5 + 2 \times x + 2 \times 5$

$= 3x^2 + 15x + 2x + 10$

$= 3x^2 + 17x + 10$ ✓

$B = (4x-7)(11-x)$

$= 4x \times 11 + 4x \times (-x) - 7 \times 11 - 7 \times (-x)$

$= 44x - 4x^2 - 77 + 7x$

$= -4x^2 + 51x - 77$ ✓

$C = (-2x+9)(3x+7)$

$= -2x \times 3x - 2x \times 7 + 9 \times 3x + 9 \times 7$

$= -6x^2 - 14x + 27x + 63$

$= -6x^2 + 13x + 63$ ✓

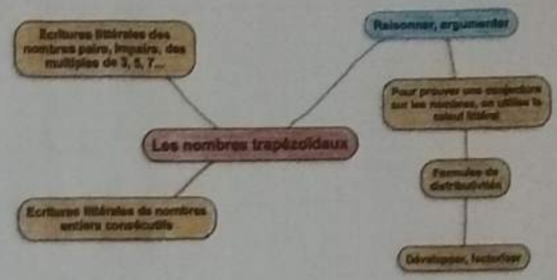
$D = (x+1)(x+2) + (x+3)(x+4)$

$= x \times x + x \times 2 + 1 \times x + 1 \times 2 + x \times x + x \times 4 + 3 \times x + 3 \times 4$

$= x^2 + 2x + x + 2 + x^2 + 4x + 3x + 12$

$= 2x^2 + 10x + 14$ ✓

Bilan de l'étude du problème



Culture et informations mathématiques actuelles

Tout comme les nombres trapézoïdaux, il existe des nombres appelés nombres triangulaires. Ces nombres sont obtenus en faisant la somme d'entiers consécutifs en partant toujours de 1.

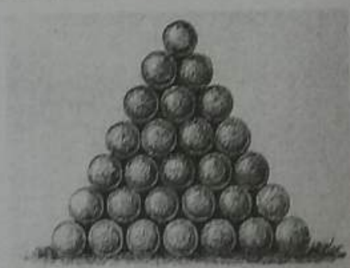
Exemple : Sur la photo ci-dessous, on constate que le 7ème nombre triangulaire est 28.
$(1+2+3+4+5+6+7 = 28)$

Une anecdote concernant le mathématicien Gauss (1777 - 1855) raconte qu'étant encore enfant, il aurait trouvé seul le moyen de calculer rapidement n'importe quel nombre triangulaire et aurait trouvé la formule suivante :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dans l'exemple sera donne :

$$1+2+3+\cdots+7 = \frac{7(7+1)}{2} = \frac{56}{2} = 28$$



Cahier d’un élève de 3ème7

Année scolaire 2015-2016

Les nombres trapézoïdaux

Enoncé :

Quels sont les nombres entiers naturels* qui sont somme d'au moins deux entiers consécutifs** ?

* Ce sont les nombres entiers positifs : 0, 1, 2, 3, 4, ...

** Ce sont des entiers qui se suivent : 1, 2 ou 3, 4, 5 ou 102, 103, 104

Recherche solo

1 = 0 + 1
3 = 1 + 2
5 = 2 + 3
7 = 3 + 4
9 = 4 + 5
11 = 5 + 6
[illegible]

3 = 0 + 1 + 2
6 = 1 + 2 + 3
9 = 2 + 3 + 4
12 = 3 + 4 + 5
15 = 4 + 5 + 6
18 = 5 + 6 + 7
3 à chaque fois = multiple de 3

$\frac{7}{2} + 0,5$

6 = 0 + 1 + 2 + 3
10 = 1 + 2 + 3 + 4
14 = 2 + 3 + 4 + 5
18 = 3 + 4 + 5 + 6
22 = 4 + 5 + 6 + 7
+ 4 à chaque fois

Bilan de la recherche

① Tous les nombres impairs sont la somme de deux entiers consécutifs.

② * La somme de 3 entiers consécutifs est paire ou impaire (mais cela ne nous permet pas de décrire les nombres trapézoïdaux car 2, 4, 8, 16, 32, 64 n'ont pas été trouvés).
* Les multiples de 3 sont la somme de 3 entiers consécutifs.

③ Les multiples de 5, 7 (nombre impair) sont la somme de 5, 7 (nombres impairs) entiers consécutifs.

④ Il y a plusieurs décompositions pour les nombres trapézoïdaux.

Etude 1 - Vérification des conjectures émises.

① $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ — b, c = ent consécutifs

nombre impair

$a - b = c$

$a - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) =$

$\frac{3}{2} = 1,5$

$1,5 + 0,5 = 2$

$1,5 - 0,5 = 1$

nombre impair $\rightarrow \frac{a}{2} = b$

$b + 0,5 = c$

$b - 0,5 = d$

c et d sont entiers consécutifs

$a = c + d$

Nb pair : il est divisible par 2

Nb impair : il n'est pas divisible par 2

On peut utiliser le calcul littéral. La lettre va symboliser un nombre inconnu ou un nombre qui varie.

x désigne un nombre entier $x + \underbrace{(x+1)}_{} = 2x + 1$ 2 entiers consécutifs Il faut montrer que c'est un nombre entier	a désigne un nombre impair Il faut montrer que a sont des nombres entiers $\frac{a}{2} + 0,5$ = un des deux nombres entiers consécutifs $\frac{a}{2} - 0,5$ = l'autre nombre entier consécutif

Nombre pair : Divisible par 2
Nombre impair : non divisible par 2, reste 1 dans la division par 2

0 : 2×0
1 : $2 \times 0 + 1$
2 : 2×1
3 : $2 \times 1 + 1$
4 : 2×2
5 : $2 \times 2 + 1$
6 : 2×3
7 : $2 \times 3 + 1$
8 : 2×4

Si a désigne un nombre entier :
Nb pair : $2 \times a$
Nb impair : $2 \times a + 1$

Conclusion : si x désigne un entier

$$\underbrace{x + (x+1)}_{\text{2 entiers consécutifs}} = \underbrace{2x + 1}_{\text{Nb impair}}$$

Si a désigne un nombre impair
$\frac{a}{2} + 0,5$ est entier ?

$$\frac{2 \times a + 1}{2} + 0,5 = \frac{2 \times a}{2} + \frac{1}{2} + 0,5 = \text{entier} + 1$$

$\frac{a}{2} - 0,5$ est entier ?

$$\frac{2 \times a + 1}{2} - 0,5 = \frac{2 \times a}{2} + \frac{1}{2} - 0,5 = a$$

Conclusion : Si a désigne un nombre impair.
$\frac{a}{2} + 0,5$ et $\frac{a}{2} - 0,5$ désignent les 2 entiers consécutifs qui permettent de vérifier que a est trapézoïdal

Conjecture n°2 :
↳ Les multiples de 3 sont la somme de 3 entiers consécutifs

$3 = 0 + 1 + 2$
$6 = 1 + 2 + 3$
$9 = 2 + 3 + 4$
$12 = 3 + 4 + 5$

a désigne un multiple de 3

$\frac{a}{3} = b$

$(b-1) + b + (b+1)$ $b+1$ $b-1$

→ On prend un multiple de 3	12
→ On le divise par 3	4
→ On prend le précédent et le suivant	3 et 5
→ on obtient la décomposition	$12 = 3+4+5$

Si a désigne un entier
$3 \times a$
a
$a - 1$ et $a + 1$

$$\underbrace{3 \times a}_{\text{multiple de 3}} = (a-1) + a + (a+1)$$

3 entiers consécutifs

$10 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$
$15 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
$25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

$5 \times a = (a-2) + (a-1) + a + (a+1) + (a+2)$

14

Les multiples de 5 sont-ils des nombres trapézoïdaux ?

- On prend un multiple de 5	10	230
- On le divise par 5	2	46
- On prend les 2 précédents et les 2 suivants	0, 1 et 3, 4	44, 45 et 47, 48
- On obtient la décomposition	10 = 0+1+2+3+4	230 = 44+45+46+47+48

a désigne un nombre entier naturel

$5 \times a$

⚠ 5 ne peut pas se décomposer sous la forme de 5 entiers naturels.

a

$a-2$, $a-1$ et $a+1$, $a+2$

$5 \times a = a-\cancel{2} + a-\cancel{1} + a + a+\cancel{1} + a+\cancel{2}$

Pourquoi 2, 4 et 8 ne sont pas trapézoïdaux ?

$2 = 0+2 = 1+1$

$4 = 0+4 = 2+2 = 3+1$

$8 = 0+8 =$

2 :
$0+1 = 1$
$1+2 = 3$
Pas de décomposition pour 2

4 :
$1+2 = 3$
$2+3 = 5$
Pas de décomposition pour 4

8 :
$3+4 = 7$
$4+5 = 9$
Pas de décomposition pour 8

2

$\times 2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$\times 2$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$\times 2$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

$\times 2$

$32 = 2^5$

$\times 2$

$64 = 2^6$

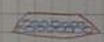
$\times 2$

$128 = 2^7$

Conjecture : Les puissances de 2 ne sont pas des nombres trapézoïdaux

↳ Non démontrée

Conjecture n° 4 :

15 : $15 = 7+8$	$15 = 4+5+6$	$15 = 1+2+3+4+5$
		

Conjecture vraie

Conjecture n° 3

Tous les multiples d'un nombre impair sont des nombres trapézoïdaux ?

a désigne un nombre entier

$\underbrace{a \times 7}_{\text{multiples de 7}} = \underbrace{a-3 + a-2 + a-1 + a + a+1 + a+2 + a+3}_{\text{7 entiers consécutifs}}$

$7 = 7 \times 1 = \cancel{(-2)} + \cancel{(-1)} + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$

$14 = 7 \times 2 = \cancel{(-1)} + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Décomposition possible à partir de 21

La conjecture est vraie mais il manque certains nombres (les 1ers multiples)

non démontrée

Etude n°2 - Où en est-on dans la résolution du problème ?

/ = nombre impair
/ = nombre multiple de 2
/ = nombre multiple de 5
/ = nombre multiple de 7
▮ = pas trapézoïdaux
/ : multiple de 9
/ = multiple de 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Conclusion : On a presque prouvé que tous les nombres entiers sauf les puissances de 2 sont des nombres trapézoïdaux.
Mais il manque encore une méthode pour : 14, 22, 26, 38, ... (voir tableau)

Etude n°3 : Programmes de calculs et calcul littéral

Voici 2 programmes de calculs :

Programme n°1 :

→ On choisit un nombre

→ On le multiplie par 6

→ On soustrait 12

Programme n°2

→ On choisit un nombre

→ On soustrait 2

→ On multiplie par 6

Faites des essais avec ces 2 programmes de calculs.
Que remarquez-vous ? Prouvez-le

①

-15	6
90	36
78	24

②

15	6
13	4
78	24

Conjecture : Les deux programmes de calculs donnent toujours le même nombre.

Preuve : $6x - 12 = 6(x - 2)$?

$6(x - 2) = 6 \times x - 6 \times 2$: formule de distributivité

$= 6x - 12$

La conjecture est prouvée

Formule de distributivité

Si k, a et b désignent des nombres,

$$\overset{\text{je factorise}}{\longleftarrow}$$
$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$
$$\underset{\text{je développe}}{\longrightarrow}$$

Exercice : Utiliser la distributivité pour transformer les expressions littérales

* $18 \times (4x + 2)$
$= 18 \times 4x + 18 \times 2$
$= 72x + 36$

* $40 + 10x$
$= 10 \times (4 + x)$

<u>Programe 1</u>

On choisit un nombre
On multiplie par −2
On soustrait 5
On multiplie par −7

<u>Programme n°2</u>

On choisit un nombre
On multiplie par −14
On ajoute 35

①

15	31	15,06
−30	−62	−30,12
−35	−67	−35,12
245	469	245,84

②

15	31	15,06
210	434	210,84
245	469	245,84

<u>Conj</u>: Les 2 programmes de calculs donnent le même résultat.

x désigne un nombre

<u>Preuve</u>

P1
$x \times (-2)$
$-2x - 5$
$(-2x - 5) \times (-7)$

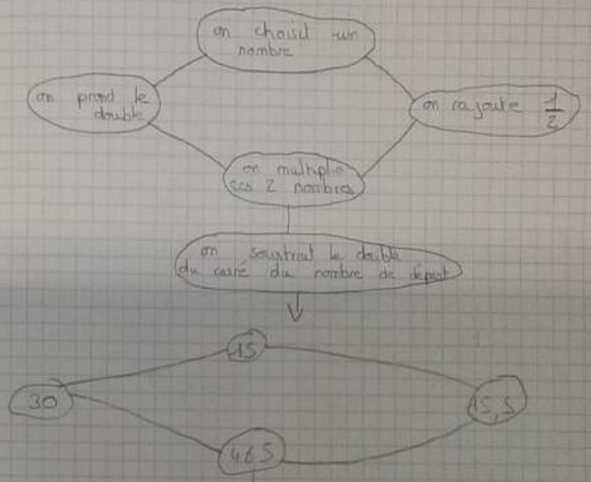
P2
$x \times -14$
$-14x + 35$

$$-7 \times (-2x - 5) = -7 \times (-2x) - (-7) \times 5$$

Transforme les − et +.

$$= -14x - (+35)$$
$$= 14x + 35$$

Programme n°1



<u>Conj</u>: Le résultat est toujours le nombre de départ

465 − 450 = 15

<u>Preuve</u>: j désigne un nombre

$$2j \times \left(j + \frac{1}{2}\right) - j^2 \times 2$$
$$= 2j\left(j + \frac{1}{2}\right) - j^2 \times 2$$
$$= 2j \times j + 2j \times \frac{1}{2} - 2j^2$$
$$= \cancel{2j^2} + j - \cancel{2j^2}$$
$$= j$$

Développer avec la distributivité :

$A = 4(7x + 2)$
$= 4 \times 7x + 4 \times 2$
$= 28x + 8$

$B = 8(6 - 2x)$
$= 8 \times 6 + 8 \times -2x$
$= 48 - 16x$

$C = -6(-2 - 4x)$
$= (-6) \times (-2) - 6 \times -4x$
$= 12 + 24x$

$\cancel{D = 6(2x - 4) - 3(4 - 5x)}$
$\cancel{= 6 \times 2x + 6 \times (-4) - 3 \times 4 + 3 \times (-5x)}$
$\cancel{= 12x + (-24) - 12 + (-15x)}$
$\cancel{= -3x - 36}$

Factoriser avec la distributivité

$A = 10x - 8$
$= 2 \times 5x - 2 \times 4$
$= 2(5x - 4)$

$B = 4x + 2x^2$
$= x \times 4 + x \times 2x$
$= x(4 + 2x)$

$C = 49x^2 - 14x$
$= x \times 49x - x \times 14$
$= x(49x - 14)$

$D = 2(x + 1) - x(x + 1)$
$= (x + 1) \times (2 - x)$

Utiliser la distributivité pour développer ou factoriser :

$A = 6x(13x - 3) - (x - 2)$
$= 6x \times 13x + 6x \times (-3) - x + 2$
$= 78x^2 + (-18) - x + 2$
$= 78x^2 - 18x + 2$

$B = -x(-3x - 2) - (4 + 2x) + 4x$
$= -x \times (-3x) + (-x) \times (-2) - 4 + (-2x) + 4x$
$= 3x^2 + 2x + (-4) + (-2x) + 4x$
$= 3x^2 + 4x - 4$

$C = 13x^2 + 2x - (4x^2 - 3)$
$= 13x^2 + 2x - 4x^2 + 3$
$= 9x^2 + 2x + 3$

$D = 16x(x - 2) + 3(x - 2)$
$= (x - 2) \times (16x + 3)$

$E = 7(3x - 1) - 4x(3x - 1)$
$= (3x - 1) \times (7 - 4x)$

Programme de calcul

→ On choisit 3 nombre consécutifs
→ On calcule le carré de celui du milieu
→ On lui soustrait le produit des extrêmes

5, 6, 7	-14, -15, -16
36	225
$5 \times 7 = 35$; $36 - 35 = 1$	$-14 \times -16 = 224$; $225 - 224 = 1$

Conjecture : Le résultat est toujours 1

Preuve : x désigne un nombre entier

$x - 1$; x ; $x + 1$

$x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - (x^2 - 1)$

$= x^2 + (-1)(x^2 - 1)$

$= x^2 + (-1) \times x^2 + (-1) \times (-1) = 1$

Avec la double distributivité :

$(x-1)(x+1) = (x + (-1))(x + 1)$

$= x \times x + x \times 1 + (-1) \times x + (-1) \times 1$

$= x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1$

$= x^2 - 1$

Développer :

$(2x + 1)(x + 3)$

$= 2x \times x + 2x \times 3 + 1 \times x + 1 \times 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x^2 + 7x + 3$

Formule de double distributivité

Si a, b, c et d désignent des nombres, alors on a :

$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Application :

1) $(4x - 3)(7x - 2)$

$= 4x \times 7x + 4x \times (-2) + (-3) \times 7x + (-3) \times (-2)$

$= 28x^2 + (-8x) + (-21x) + 6$

$= 28x^2 - 29x + 6$

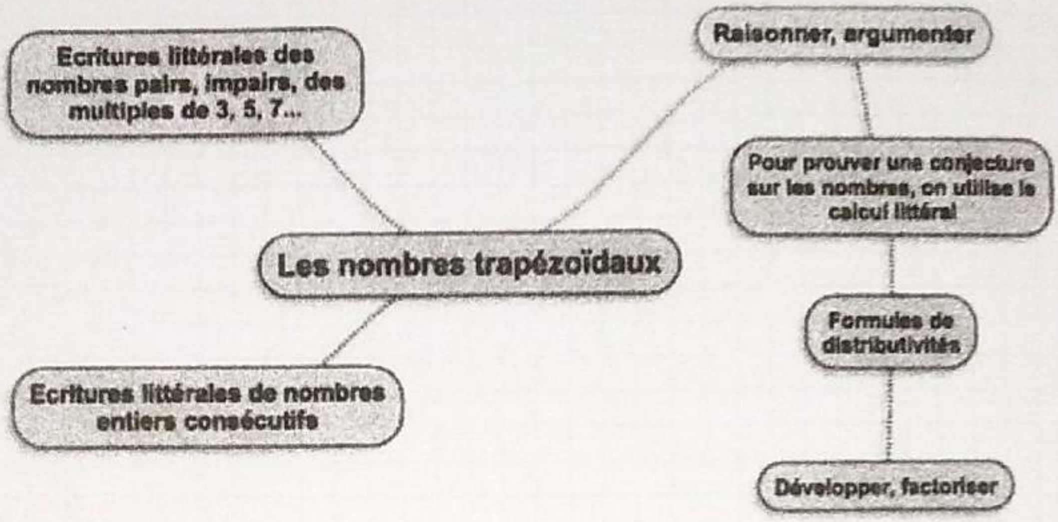
2) $(-8x + 3)(6x - 4)$

$= -8x \times 6x + (-8x) \times (-4) + 3 \times 6x + 3 \times (-4)$

$= -48x^2 + 32x + 18x + (-12)$

$= -48x^2 + 50x - 12$

Bilan de l'étude du problème



Culture et informations mathématiques actuelles

Tout comme les nombres trapézoïdaux, il existe des nombres appelés nombres triangulaires. Ces nombres sont obtenus en faisant la somme d'entiers consécutifs en partant toujours de 1.

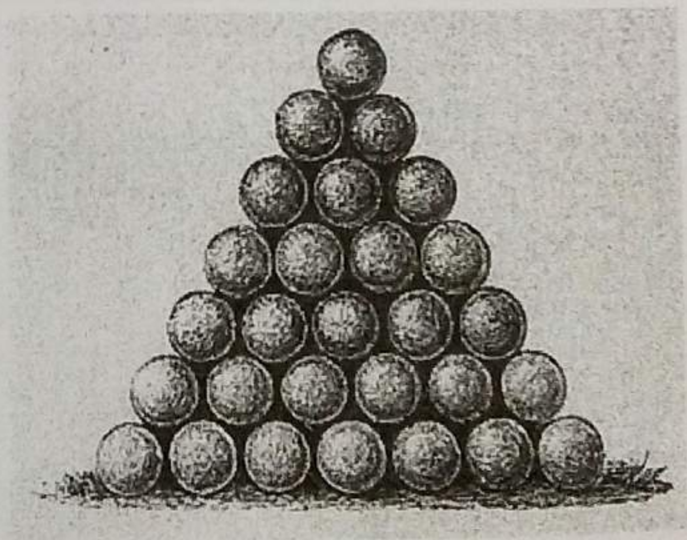
Exemple : Sur la photo ci-dessous, on constate que le 7ème nombre triangulaire est 28.
(1+2+3+4+5+6+7 = 28)

Une anecdote concernant le mathématicien Gauss (1777 - 1855) raconte qu'étant encore enfant, il aurait trouvé seul le moyen de calculer rapidement n'importe quel nombre triangulaire et aurait trouvé la formule suivante :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Dans l'exemple sera donne :

$$1+2+3+\cdots+7=\frac{7(7+1)}{2}=\frac{56}{2}=28$$



Cahier d’un élève de 3ème7

Année scolaire 2015-2016

Les nombres trapézoïdaux.

Énoncé :

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

Tous les nombres impairs marchent.
Tous les multiples de 6 marchent
~~Tous les multiples de la table de 4~~

Ceux qui ne marche pas :

2, 4, 16, 8, 32, 64

$2\times2=4\times2=8\times2=16\times2=32\times2=64\times2$

T

3, 4, 5 4, 5, 6 5, 6, 7

Bilan de la recherche

① Tous les nombres impairs sont la somme de deux entiers consécutifs

② La somme de 3 entiers consécutifs est pair ou impair

③ Les multiples de 5, 7 ... sont la somme de 5 ou 7 nombres consécutifs

(mais cela ne nous permet pas de déduire les nombres trapézoïdaux car 2, 4, 8, 16, 32, 64 n'ont pas été trouvés. Les multiples de 3 et 6 sont somme de 3 entiers consécutifs.

④ Il y a plusieurs décomposition possible pour les nombres trapézoïdaux

Étude 1 - Vérification des conjectures émises

① Nb pairs : il est divisible par 2

Nb impairs : il n'est pas divisible par 2

On peut utiliser le calcul littéral : la lettre va symboliser un nombre inconnu ou un nombre qui | varie / change

x désigne un nombre entier

$\underbrace{x}+\underbrace{(x+1)}=y$

nombres consécutifs

$\hookrightarrow \underbrace{2x+1}$

Il faut montrer que c'est un nombre impair

a désigne un nombre impair

$\frac{a}{2}+0{,}5$ ← un des deux nombres entiers consécutifs

Il faut montrer que ce sont bien des entiers

$\frac{a}{2}-0{,}5$ ← un des deux nombres entiers consécutifs

$\left(\frac{a}{2}+0{,}5\right)+\left(\frac{a}{2}-0{,}5\right)=a$

Ce sont des entiers car divisant un nombre impair par deux puis lui ajouté ou le soustrairant 0,5 sera toujours entier

$\frac{17}{2}=8{,}5$

$8{,}5-0{,}5=8$

$8{,}5+0{,}5=9$

Nombre pair : Divisible par 2

Nombre impair : Reste 1 dans la division par 2

0 : 2×0
1 : $2 \times 0 + 1$
2 : 2×1
3 : $2 \times 1 + 1$
4 : 2×2
5 : $2 \times 2 + 1$
6 : 2×3
7 : $2 \times 3 + 1$
8 : 2×4
9 : $2 \times 4 + 1$

Si a désigne un nombre entier
Nb pair : $2 \times a$
Nb impair : $2 \times a + 1$

Conclusion : Si x désigne un entier

$$\underbrace{x + (x+1)}_{\text{2 entiers consécutifs}} = \underbrace{2x+1}_{\text{nombre impair}}$$

Si a désigne un nombre impair = a = 2 × entier + 1

$\frac{a}{2} + 0,5$ est entier ? → $\frac{2 \times \text{entier} + 1}{2} + 0,5 = \frac{\cancel{2} \times \text{entier}}{\cancel{2}} + \frac{1}{2} + 0,5$
= entier + 1 } c'est bien encore un entier

$\frac{a}{2} - 0,5$ est entier ? $\frac{2 \times \text{entier} + 1}{2} - 0,5 = \frac{\cancel{2} \times \text{entier}}{\cancel{2}} + \frac{1}{2} - 0,5$
= entier − 0

Conclusion : Si a désigne un nombre impair

$x \times 3 = (a-1) + a + (a+1)$

$a \times 3 = (a-1) + a + (a+1)$

→ On prend un multiple de 3 — Si a désigne un entier

→ On le divise par 3 — $3 \times a$

a

→ On prend le précédent et le suivant — $a-1$ et $a+1$

→ On obtient la décomposition — $3 \times a = (a+1) + a + (a-1)$

On peut faire $5x = [illegible](x-2) + (x-1) + x +$
$(x+1) + (x+2)$

Mais cette [illegible] [illegible] par 5

$5 \times 1 = [illegible]$

[illegible]

des multiples de 5 sont-ils des nombres [illegible]

On prend un multiple de 5 — a désigne un nombre entier naturel

On le divise par 5 — $5 \times a$

On prend les deux précédents et les deux suivants — a

On obtient la décomposition — $a-2$, $a-1$ et $a+1$, $a+2$

$5 \times a = a-2 + a-1 + a + a+1 + a+2$

⚠ 5 ne peut pas se décomposer sous la forme de 5 consécutifs

Conclusion : Tous les multiples de 5 sont des nombres trapézoïdaux

Pourquoi 2, 4, 8 ne sont pas trapézoïdaux ?

$\left.\begin{array}{l} 2 : 0+1=1 \\ \quad 1+2=3 \end{array}\right\}$ Pas de décomposition pour 2

$\left.\begin{array}{l} 4 : 1+2=3 \\ \quad 2+3=5 \\ \quad 1+2+3=6 \end{array}\right\}$ Pas de décomposition pour 4

$\left.\begin{array}{l} 8 : 3+4=7 \\ 5+4=9 \\ 1+2+3=6 \\ 2+3+4=9 \\ 1+2+3+4=10 \end{array}\right\}$ Pas de décomposition pour 8

2 :

$4 : 2\times2 = 2^2$

$8 : 2\times2\times2 = 2^3$

$16 : 2\times2\times2\times2 = 2^4$

$32 : 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

$64 : 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6$

$128 : 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^7$

$256 : 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^8$

$512 : 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^9$

$1024 : 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^{10}$

Conjecture : les puissances de 2 ne sont pas trapézoïdaux.
↳ Non démontré

Conj n° 3

Tous les multiples d'un nombre impair sont des nombres trapézoïdaux ?

multiple de 7 : a désigne un nombre entier

$a\times7 = a-\cancel{3} + a-\cancel{2} + a-\cancel{1} + a + a+\cancel{1} + a+\cancel{2} + a+\cancel{3}$

$7 = 7\times1 = -2+-1+0+1+2+3+4$

$14 = 7\times2 = -1+0+1+2+3$

La conjecture est vraie mais il manque certains nombres (les pairs multiples)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Conclusion : On a presque prouvé que tous les nombres entiers sauf les puissances de 2 sont des nombres trapézoïdaux mais il manque une méthode pour 14, 22, 26, 38

Etude 3 Programmes de calculs et calcul littéral

Voici deux programmes de calcul

Programme n°1	Programme n°2
On choisit un nombre	On choisit un nombre
On le multiplie par 6	On soustrait 2
On soustrait 12	On multiplie par 6

Les programmes sont les mêmes :

①
Sur le nombre multiplié
On enlève un total de 12

②
Sur le nombre normal
On enlève 2 et On multiplie par 6
Donc on enlève $2 \times 6 = 12$
On enlève un total de 12

$x \times 6 - 12 = 6x - 12$ $\qquad$ $(x - 2) \times 6 = 6x - 12$

La conjecture est prouvée

formule de distributivité
Si k, a et b désignent des nombres,

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

je factorise / je développe

$$\square \times (\bigcirc + \triangle) = \square \times \bigcirc + \square \times \triangle$$

Exercice : utiliser la distributivité pour transformer les expressions littérales

$18 \times (4x + 2) = 18 \times 4x + 18 \times 2 = 72x + 36$

$40 + 10x = 10(4 + x)$

Programme 1	Programme 2
On choisit un nombre	On choisit un nombre
On multiplie par -2	On multiplie par 14
On soustrait 5	On ajoute 35
On multiplie par -7	

$(a \times -2 - 5) \times -7$ $\qquad$ $a \times 14 + 35$

$-2a \times -7 + -5 \times -7$ $\qquad$ $14a + 35$

$14a + 35$

Programme 1 $\qquad$ Programme 2

On choisit un nombre

On prend le double $\qquad$ On rajoute $\frac{1}{2}$

On multiplie ces 2 nombres

On soustrait le double
du carré du nombre de départ

4 3 6

8 6 6 4,5 12 9

48 108

16 36

a 1

2 1,5

$a \times 2$ $a + (a \div 2)$

3

$2a + (a + a \div 2)$

2

$2a + (a + a \div 2) - (a^2 \times 2)$

32

$2a + a + 2a + (a \div 2) - 2a^2$ 64 43

$5a + (a \div 2) - 2a^2$ 2752

$5,5a - 2a^2$

$2a^2 - 5,5a$ 704

$A = 4(7x + 2)$ $C = -6(-2 - 4x)$

$A = 4 \times 7x + 8$ $C = -6 \times -2 + -6 \times (-4x)$

$A = 28x + 8$ $C = 24x + 12$

$B = 8(6 - 2x)$ $D = 6(2x - 4) - 3(4 - 5x)$

$B = 8 \times 6 + (-2x) \times 8$ $D = 6 \times 2x + 6 \times (-4) + (-3) \times 4 + (-3) \times (-5x)$

$B = -16x + 48$ $D = 12x + -24 + -12 + 15x$

$D = 27x + (-36)$

$A = 10x - 8$ $C = 49x^2 - 14x$

$A = 2(5x + (-4))$ $C = x(49x - 14)$

$B = 4x + 2x^2$ $D = 2(x + 1) - x(x + 1)$

$B = 2x(2 + x)$ ~~$D = 2x + 2 - x^2 + x$~~

~~$D = [2(x + 1) - x(x + 1)]$~~

$2(1x) - x(1x)$

$(x + 1) \times (2 - x)$

Programme de calcul

On choisit 3 nombres consécutifs

On calcule le carré de celui du milieu

On lui soustrait le produit des extrêmes

5 6 7	10 11 12	-3 -2 -1
36	121	4
35	120	3
1	1	1

$(a-1) \times a \times (a+1)$ $\quad$ $(a-1) \times a^2 \times (a+1)$

$a^2 \times (a-1)(a+1)$ $\quad$ $a^2 - (a-1) \times (a+1)$

$a^2 + a(a+1) + (-1)(a+1)$ $\quad$ $a^2 - a \times (a+1) + (-1) \times (a+1)$

$a^2 - a \times a - a \times 1 + (-1) \times a + (-1) \times 1$

$a^2 + a \times a + a \times 1 + (-1) \times a + (-1) \times 1$

$a^2 - a^2 + a \times -a + 1$

$a^2 + a^2 + a + (-a) + (-1)$

$a^2 - (a-1) \times (a+1)$

$2a^2 + (-1)$ $\quad$ $a^2 - a + 1 \times$

Essais

10/11/12	3/4/5	-3/-2/-1
121	16	4
-	-	-
120	15	3
=	=	=
1	1	1

Conjecture :

Le résultat sera toujours 1.

Preuve : a désigne un nombre entier

$a^2 - (a-1) \times (a+1)$

$= a^2 + (-a) \times (a+1) + 1 \times (a+1)$

$= a^2 + (-a) \times a + (-a) \times 1 + 1 \times a + 1 \times 1$

$= \cancel{a^2} + -\cancel{a^2} + -\cancel{a} + \cancel{a} + 1$

$= 1$

$2x \times x + 2x \times 3 + 1 \times x + 1 \times 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x^2 + 7x + 3$

Formule de double distributivité

Si a, b, c et d désignent des nombres, alors, on a :

$(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Application :

1) $(4x-3)(7x-2)$

1) $4x \times 7x + 4x \times (-2) + (-3) \times 7x + (-3) \times (-2)$

1) $28x^2 + (-8x) + (-21x) + 6$

1) $28x^2 + (-29x) + 6$

2) $(-8x+3)(6x-4)$

2) $-8x \times 6x + (-8x) \times (-4) + 3 \times 6x + 3 \times (-4)$

2) $-48x^2 + 32x + 18x + (-12)$

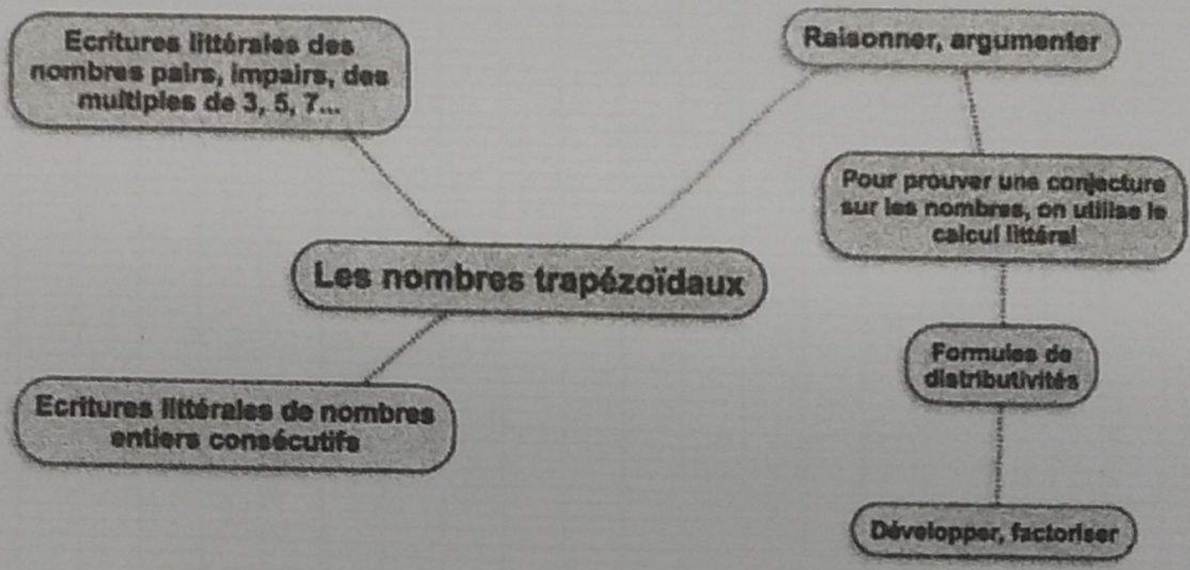
2) $-48x^2 + (-12) + 50x$

2) $-48x^2 + 50x - 12$

$(3x - (6 + (6-5)))(3 + (4 - 7 + 3))$

Phillipe 4 B9

Bilan de l'étude du problème



Culture et informations mathématiques actuelles

Tout comme les nombres trapézoïdaux, il existe des nombres appelés nombres triangulaires. Ces nombres sont obtenus en faisant la somme d'entiers consécutifs en partant toujours de 1.

Exemple : Sur la photo ci-dessous, on constate que le 7ème nombre triangulaire est 28.

(1+2+3+4+5+6+7 = 28)

Une anecdote concernant le mathématicien Gauss (1777 - 1855) raconte qu'étant encore enfant, il aurait trouvé seul le moyen de calculer rapidement n'importe quel nombre triangulaire et aurait trouvé la formule suivante :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Dans l'exemple sera donne :

$$1+2+3+\cdots+7=\frac{7(7+1)}{2}=\frac{56}{2}=28$$