Les nombres trapézoïdaux

Durée :

<u>Connaissances et capacités exigibles :</u>

Connaissances	**Capacités**
Factorisation.	*- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.*

Commentaires :

- Calcul littéral :

  Les travaux se développent dans trois directions :
  - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
  - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes (non traité ici);
  *- utilisation pour prouver un résultat général (**en particulier en arithmétique**).*
  Les activités visent la maîtrise du développement ou de la factorisation d'expressions simples.

  La simple distributivité et la double distributivité seront revues comme outil fondamental pour les manipulations littérales. Une place importante sera accordée aux rappels de développement.

  L'utilisation du calcul littéral pour la mise en équation sera revue durant le chapitre « Equations et équations produits ».

- Arithmétique : rappels sur les notions de diviseurs et multiples ainsi que sur leur écriture littérale

<u>Contenu du document :</u>

Doc 1 - Durée: 2 fois 50 min

Thème : Mise en oeuvre de la situation

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais, prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici à la preuve des conjectures émises.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : La résolution complète de ce problème est compliquée mais on peut s'en approcher de près. La démonstration ne demande pas de connaissances supérieures au niveau collège mais le raisonnement est un peu long pour des élèves de 3ème.

Doc 2 -

Thème : Analyse a priori de la situation

<u>Enoncé du problème :</u>

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

<u>Solution du problème :</u>

Après avoir expérimenté sur des sommes d'entiers consécutifs, on conjecture que tous les entiers peuvent être décomposés en somme d'entiers consécutifs, sauf les puissances de 2 d'exposant supérieur ou égal à 1

Démonstration :

Elle utilise le résultat suivant : si n est un entier naturel,

$$\boxed{S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette démonstration permet de revoir ou d'introduire ce résultat, comme outil de résolution de problème.

N étant un naturel, on cherche s'il existe deux entiers naturels a et n tels que :

$$N = a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+n-1)$$

$$N = S_{a+n-1} - S_{a-1}$$

$$2N = n(2a+n-1)$$

On peut alors raisonner sur la parité de l'entier n:

- si n est pair : 2a+n–1 est impair
- si n est impair : 2a+n–1 est pair

Par conséquent, des deux entiers n et 2a + n – 1, l'un est pair et l'autre impair : leur produit étant égal à 2N , cela entraîne que N possède un facteur premier impair : N n'est pas une puissance de 2.
Autre raisonnement, par l'absurde : si N = 2^m alors on cherche a et n tels que : 2^{m+1} = n(2a + n – 1), ceci est impossible car l'un des deux facteurs du second membre est impair.

Il reste encore à démontrer que tout nombre N qui n'est pas une puissance de 2 peut s'écrire comme somme d'entiers consécutifs :
2N est donc le produit d'un nombre impair i par un nombre pair p. Alors : 2N = ip et 2N = n(2a + n – 1) et
si : i < p , alors il suffit de poser : n = i et p = 2a + n – 1 , soit : a = (p — i + 1) / 2
si : i > p , alors il suffit de poser : n = p et i = 2a + n – 1, soit : a = (i — p + 1) / 2

La conjecture est ainsi complètement démontrée, et cette démonstration donne un procédé pratique pour déterminer a et n entiers naturels tels que : N = a + (a + 1) + (a + 2) + ... + (a + n – 1).

Remarque : l'égalité « 2N=n(2a+n–1) » peut aussi se montrer avec la formule d'aire d'un trapèze : $A = \frac{(a+b)h}{2}$, avec *a* la petite base, b la grande base et h la hauteur.
Avec les notations précédentes, on obtient directement :

$$N = \frac{(a+a+n-1)n}{2}$$

Remarque bis : l'existence d'une telle décomposition pour les entiers n qui ne sont pas une puissance de 2 peut se faire en s'autorisant temporairement l'utilisation de nombres entiers relatifs. En effet, si $n = i \times m$ où i est un entier impair, alors on peut écrire n sous la forme de i entiers (relatifs) consécutifs. Si le plus petit entier de cette décomposition est négatif, il va s'annuler avec son opposé présent dans cette somme, et ainsi de suite de sorte à ne laisser que des termes positifs et consécutifs dans la somme. C'est cette preuve qui est accessible pour des élèves de 3ème.

<u>Analyse des méthodes et procédures :</u>

Les méthodes :
- essais avec calculs numériques
- utilisation d'exemples génériques
- disjonction de cas et extraction de sous-problèmes plus faciles à résoudre.

Les conjectures facilement accessibles (et démontrables):
- Les entiers impairs sont des nombres trapézoïdaux
- Les multiples d'un nombre impair sont des nombres trapézoïdaux
- Les puissances de 2 ne sont pas des nombres trapézoïdaux (sans démo)

<u>Les mathématiques travaillées et à travailler :</u>

- **Arithmétique :**
  - Ecriture littéral d'un multiple d'un nombre n
  - Ecriture littéral des nombres pairs ou impairs
  - Somme des n premiers entiers consécutifs
- **Géométrie :**
  - Aire d'un trapèze
- **Calcul littéral:**
  - distributivité simple et double
  - factorisation et développement

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

<u>Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche</u>

- conjecture sur les nombres impairs
- conjectures sur les multiples d'un nombre impair
- conjectures sur les sommes paires de nombres consécutifs
- conjectures sur les sommes impaires de nombres consécutifs
- …

<u>Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.</u>

Etude 1 - Vérification des conjectures émises

Recherche de contre-exemples ou recherche de preuve pour les conjectures proposées. Il y aura un travail de reformulation des conjectures pour qu'elles soient cohérentes avec le problème posé. Par exemples, les conjectures portant sur les sommes (im)paires de nombres consécutifs ne nous intéressent pas vraiment. C'est surtout leurs réciproques qui nous intéressent.

On fait le lien ici avec le calcul littéral et la formule de distributivité.

Etude 2 - Quels sont les nombres trapézoïdaux trouvés jusqu'à présent

On fait un état des lieux des conjectures prouvées précédemment. On peut faire un crible des nombres trapézoïdaux trouvés et on peut conjecturer (et même partiellement prouver) que les multiples des nombres impairs sont trapézoïdaux.

Concernant les puissances de 2, on peut leur présenter le raisonnement qui prouve qu'ils ne peuvent pas être trapézoïdaux mais il est un peu compliqué. Il sera admis sinon.

Etude 3 - Approfondissement sur le calcul littéral

Entrainement à :
- des exercices de calcul littéral pour manipuler la formule de distributivité
- programmes de calcul pour continuer de travailler sur les preuves concernant les nombres
- …

Doc 4 -

Thème : Ressources pour utiliser les formules de distributivité

➡ **Utilisation de la distributivité simple.**

Rappel de la formule de la simple distributivité avec les symboles ou les lettres.

$$\Delta\times(\square+\bigcirc)=\Delta\times\square+\Delta\times\bigcirc \qquad \text{ou} \qquad k(a+b)=ka+kb$$

Puis :
- Preuve géométrique (avec le pavage du rectangle). *Si la classe en ressent le besoin*
- Développer avec la simple distributivité: rappel de la définition et application + *méthode posée si besoin*
- Factoriser avec la simple distributivité: rappel de la définition et application
- Réduire avec la simple distributivité: rappel de la définition et application
- Utilisation d'un signe « – » devant une parenthèse. *Conseil pour les élèves. Transformer toutes les soustractions en addition de nombres opposés afin de mieux appliquer la formule et d'éviter les pièges.*

➡ **Utilisation de la distributivité double.**

Rappel de la formule de la double distributivité avec les symboles ou les lettres.

$$(\Delta+\nabla)\times(\square+\bigcirc)=\Delta\times\square+\Delta\times\bigcirc+\nabla\times\square+\nabla\times\bigcirc \qquad \text{ou} \qquad (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Puis :
- Preuve géométrique (avec le pavage du rectangle)
- Développer avec la double distributivité: application + *méthode posée si besoin… Et utilisation avec les nombres négatifs.*

➡ **Preuves arithmétiques.**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie , démontrer la formule ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. La somme de trois entiers consécutifs (qui se suivent) est un multiple de 3.
2. La somme de deux entiers pairs est pair.
3. La somme de deux entiers impairs est impair.

➡ **Programmes de calculs.**

Programmes n°1

Vérifier que les programmes de calculs sont égaux (donnent toujours le même résultat).

Programme 1	Programme 2
On choisit un nombre	On choisit un nombre
On le multiplie par 6	On soustrait 2
On soustrait 12	On multiplie par 6

Programmes n°2

Vérifier que les programmes de calculs sont égaux (donnent toujours le même résultat).

Programme 1	Programme 2
On choisit un nombre	On choisit un nombre
On multiplie par -2	On multiplie par 14

Programme 1	Programme 2
On soustrait 5	On ajoute 35
On multiplie par -7	

Programme n°3

Que peut-on conjecturer quand on applique ce programme de calcul ? Prouvez-le

Programme (en écriture littérale) $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)-2x^2(=x)$

Programme n°4

Voici le programme de calcul suivant :

1. on choisit trois nombres consécutifs
2. on calcule le carré de celui du milieu
3. on lui soustrait le produit des extrêmes
4. qu'obtient-on ?

Faire plusieurs essais, émettre une ou plusieurs conjectures et prouver cette conjecture.

Programme n°5

Voici le programme de calcul suivant :

1. on choisit trois nombres consécutifs
2. on calcule le carré des extrêmes
3. on en calcule la différence
4. qu'obtient-on ?

Faire plusieurs essais, émettre une ou plusieurs conjectures et prouver cette conjecture.

D’autres programmes de calculs (pour migrer vers les identités remarquables) sont disponibles sur le site: http://pegame.ens-lyon.fr

Doc 5 -

Thème : Trace écrite a priori pour le calcul littéral

Introduction.

- Le calcul littéral sert à produire des formules pour prouver un résultat général.

- Le calcul littéral sert à manipuler et à transformer des formules pour faciliter un calcul ou pour prouver que deux formules sont égales.

On utiliser très souvent le calcul littéral pour prouver des conjectures sur les nombres (propriétés d'arithmétiques ou programmes de calculs)

I. La distributivité simple et double.

Formule de distributivité simple : c'est la formule de base pour le calcul littéral. Pour tous nombres relatifs a,b et k, on a l'égalité suivante : $$\underbrace{k\times(a+b)}_{\text{Produit}}=\underbrace{k\times a+k\times b}_{\text{Somme}}$$ La formule de distributivité peut aussi s'écrire $\Delta\times(\square+\bigcirc)=\Delta\times\square+\Delta\times\bigcirc$	**Formule de distributivité double :** Elle provient de la formule de distributivité simple. Pour tous nombres relatifs a,b,c et d, on a l'égalité suivante : $$\underbrace{(a+b)\times(c+d)}_{\text{Produit}}=\underbrace{a\times c+a\times d+b\times c+b\times d}_{\text{Somme}}$$ La formule de distributivité double peut aussi s'écrire $(\Delta+\nabla)\times(\square+\bigcirc)=\Delta\times\square+\Delta\times\bigcirc+\nabla\times\square+\nabla\times\bigcirc$

II. Développer, factoriser, simplifier et réduire.

- **Développer** une expression littérale, c'est transformer un **produit en une somme** à l'aide de la formule de distributivité.
- **Factoriser**, c'est transformer **une somme en un produit** à l'aide de la distributivité.
- **Simplifier** une expression littérale, c'est utiliser les conventions pour alléger l'écriture de l'expression littérale.
- **Réduire** une expression littérale, c'est diminuer le nombre de termes dans une somme.

Exemples :

Je développe, je simplifie et je réduis à l'aide de la distributivité : $4(3x-2)-(-3x+6)$ $=4(3x+(-2))+(-1)(-3x+6)$ $=4\times 3x+4\times(-2)+(-1)\times(-3x)+(-1)\times 6$ $=12x+(-8)+3x+(-6)$ $=15x+(-14)$ $=15x-14$	Je factorise à l'aide de la distributivité : $4x^2-16x$ $=4x\times x+4x\times(-4)$ $=4x(x+(-4))$ $=4x(x-4)$

Je développe, je simplifie et je réduis à l'aide de la double distributivité :

$$
\begin{aligned}
&(5x-6)(-4x+3) \\
&=(5x+(-6))(-4x+3) \\
&=5x\times(-4x)+5x\times 3+(-6)\times(-4x)+(-6)\times 3 \\
&=-20x^2+15x+24x+(-18) \\
&=-20x^2+39x+(-18)
\end{aligned}
$$

Doc 6 -

Thème : Trace écrite a priori pour l'arithmétique

IV. Les nombres entiers et leur écriture littérale

On peut caractériser certains types de nombre entier avec une expression littérale. En voici quelques exemples :

Les nombres pairs : ce sont des multiples de 2. Ils s'écrivent sous la forme

$2k$, où *k* est un nombre entier.

Les nombres impairs : ce sont tous ceux qui ne sont pas multiples de 2. Ils s'écrivent sous la forme

$2k+1$, où *k* est un nombre entier.

Exemples : 18 = 2 x 9, c'est un nombre pair ; 21 = 2 x 10 + 1, c'est un nombre impair.

Les multiples d'un nombre *n* : Ils s'écrivent sous la forme

$n \times k$, où *k* est un nombre entier.

Les nombres entiers consécutifs : Ils s'écrivent sous la forme

$n+(n+1)+(n+2)+\text{etc}$ ou

Exemples :

- multiples de 4 : 24 = 4 x 6 ; 36 = 4 x 9 …
- multiples de 7 : 63 = 7 x 9 ; 84 = 7 x 12 …