Retour d’expérience Problème qui déchire : classe de 6e ordinaire - janvier 2022

Contexte

Ce problème a été proposé à 3 classes de Liaison école-collège P.E. Victor (CM1-CM2 ; 6e SEGPA et 6e ordinaire), dans le cadre d’un projet de « recherches en mathématiques » sur toute l’année scolaire.

La préparation de séance propre au « problème qui déchire » a été menée avec S. Desgeorges, RMC dans la Drôme, qui expérimente avec des professeurs des écoles en cycle 3 le même problème et qui le bonifient depuis plusieurs années. Cet échange et le généreux partage de leurs ressources a pu avoir lieu via le réseau du groupe de recherche DREAMaths de l’IREM.

Travail préparatoire à la phase de recherche

Une première séance de 30-45 min destinée à familiariser les élèves avec l’énoncé du « problème qui déchire » a été organisée : elle a permis de faire manipuler les élèves et de les sensibiliser à organiser leurs données de recherche sous la forme d’un tableau.

Action 0 : 1 feuille
Action 1 : on la déchire en 2 morceaux
Action 2 : on prend un morceau et on le déchire à nouveau en 2.

Construire un tableau peut être utile pour chercher...

Le tableau a été distribué aux élèves :

Action												
Morceaux												

Les élèves ont cherché en binôme à répondre aux questions suivantes :

1) A la fin de l’action 7, combien a-t’on de morceaux de papier ? 8
2) A la fin de l’action 10, combien a-t’on de morceaux de papier ? 11
3) Peut-on avoir 15 morceaux de papier ? Si oui, en combien d’actions ? Oui en 14 actions
4) Peut-on obtenir 63 morceaux de papier ? Si oui, en combien d’actions ? Oui en 62 actions

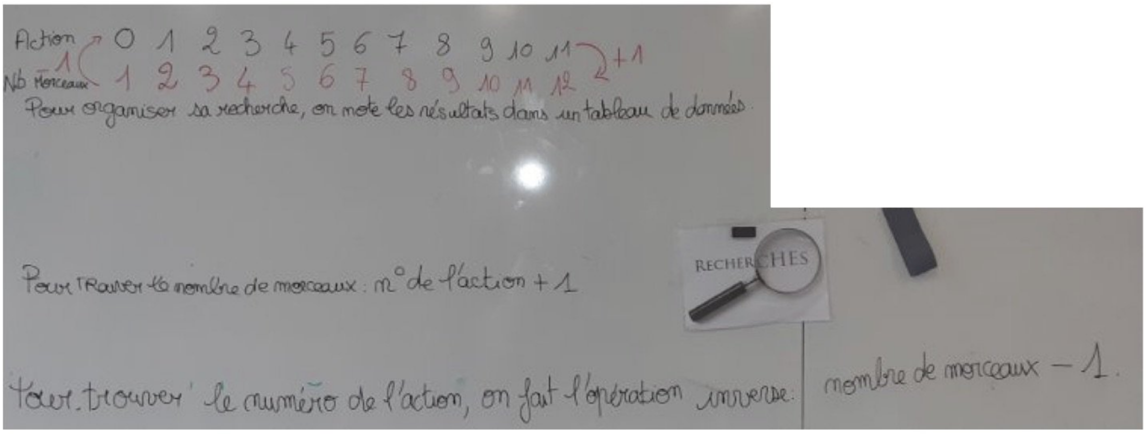
Grâce aux judicieux conseils des collègues de la Drôme, une règle de manipulation de base a tout de suite été partagée avec les élèves :

--> si vous souhaitez recommencer, jetez tous vos morceaux à la poubelle et demandez un nouveau papier.

Tous les élèves sont entrés en activité et la très grande majorité d’entre eux est sortie de la manipulation pure pour passer à une représentation plus mathématique et abstraite du problème :

—> Nombre de morceaux = Numéro action + 1 et la notion d’opération inverse a été verbalisée par les élèves avec Numéro action = Nombre de morceaux - 1.

Le bilan collectif qui en a découlé a même conduit une élève à prononcer le groupe de mots « suite de nombres » : ceci m’a conduite à sensibiliser les élèves au fait que c’est exactement ce dont il s’agit dans le problème qui déchire et que la suite est un véritable objet mathématique que certains étudieront de façon plus formelle au lycée. Dans cette étape, les élèves ont directement explicité la « suite du nombre de morceaux » en fonction du « numéro de l’action » et ne sont pas passés par une définition « par récurrence » du type, Nombre de morceaux à l’action ‘n’ = Nombre de morceaux à l’action ‘n-1’ + 1.



Phase de recherche

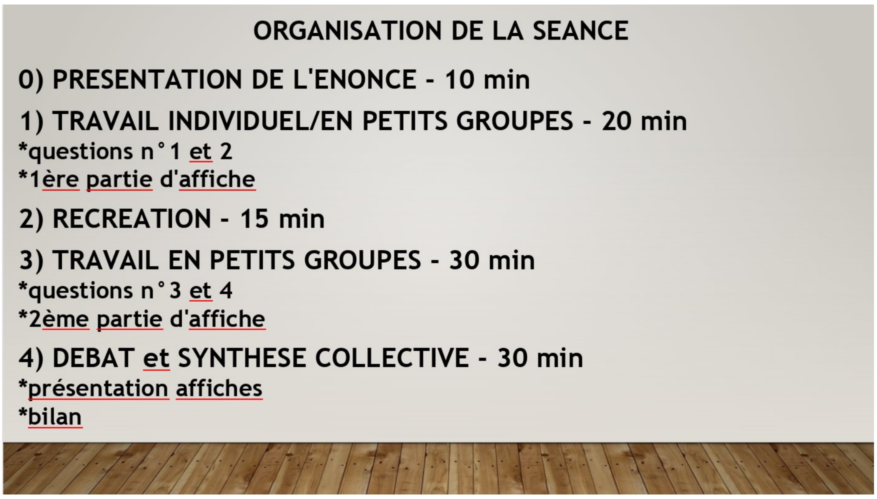
Trois jours après, une séance de 2h (à laquelle il faut retirer le rituel de début de cours et la récréation en milieu de séance) a ensuite été proposée aux élèves avec l'énoncé suivant :

Action 0 : 1 feuille
Action 1 : on la déchire en 3 morceaux
Action 2 : on prend un morceau et on le déchire à nouveau en 3.

Construire un tableau peut être utile pour chercher...

1) A la fin de l'action 7, combien a-t'on de morceaux de papier ? 15
2) A la fin de l'action 10, combien a-t'on de morceaux de papier ? 21
(manipulation non autorisée)
3) Peut-on avoir 27 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ?
(manipulation autorisée uniquement pour vérifier) Oui en 13 actions
4) Peut-on obtenir 40 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ? Non c'est impossible

Dès le début, le déroulement de la séance a été communiquée aux élèves organisés en 6 ilots de 3-4 élèves.



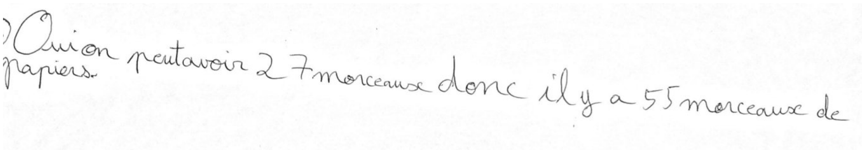
Au lancement de l'activité, les élèves ont mis du temps à se concentrer pour structurer leur recherche : il a fallu recommencer plusieurs fois les manipulations, car un certain nombre d'entre eux ont d'abord cherché à reproduire le tableau de la fois précédente et à compléter la ligne « morceaux » en ajoutant spontanément 3 morceaux entre chaque action « puisqu'on déchire en 3 morceaux madame ».

Je leur ai rappelé qu'une production sous forme d'affiche et de présentation orale était attendue en fin de séance, ce qui les a finalement conduits à prendre le temps de bien comprendre ce qu'impliquait le nouvel énoncé.

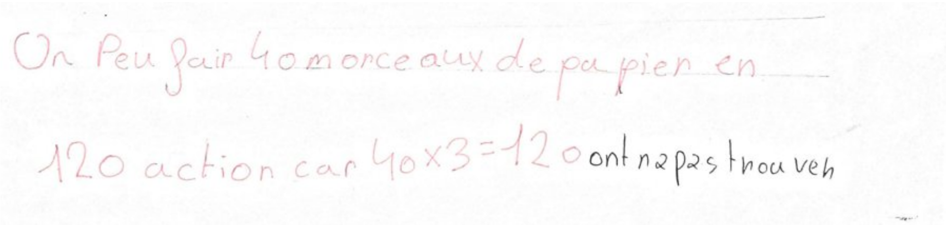
Une fois les groupes d'élèves bien rentrés dans l'activité, ils ont tous répondu avec succès aux questions 1 et 2 sur le nombre de morceaux obtenus.

Le processus inverse, plus complexe, consistant à remonter au nombre d'actions à partir du nombre de morceaux (questions 3 et 4), a posé plus de difficultés : 2 groupes n'y sont pas tout à fait parvenus, comme en témoignent les extraits d'affiches ci-dessous

Dans un des deux groupes, la difficulté est venue du fait que la secrétaire du groupe n'a pas eu le temps/la possibilité de comprendre les explications impatientes et agacées du camarade qui avait compris (il s'agit d'un élève à besoins particuliers). Il en résulte une confusion 'nombre de morceaux' / 'numéro de l'action' dans l'affiche.


Oui on peutavoir 27morceaux donc il y a 55morceaux de papiers.

Dans l'autre groupe, nous avons eu une discussion avant présentation de l'affiche qui a conduit les élèves à manifester que leur réponse était incorrecte car « le numéro de l'action est forcément inférieur au nombre de morceaux », mais cette réponse n'a pas pu être bonifiée par ses auteurs avant la présentation orale.


On Peu fair 40morceaux de papier en

120 action car 40x3=120 ont na pas trouveh

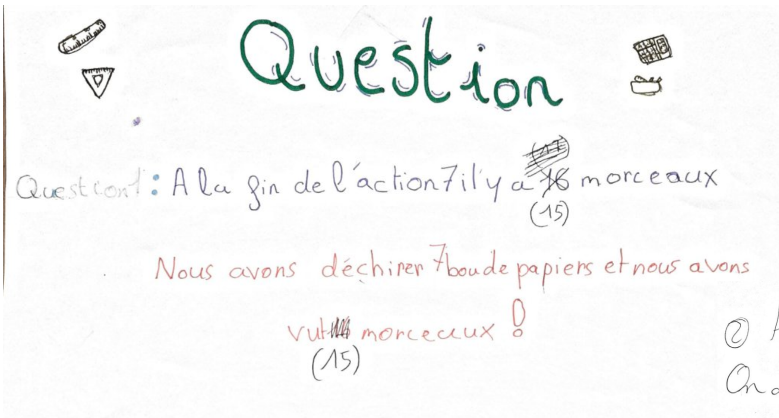
Les 4 autres groupes ont trouvé l'approche 'suite récurrente' arithmétique de raison 2 : « pour connaître le nombre de morceaux à une certaine étape, j'ajoute 2 morceaux au nombre de morceaux obtenu pour l'action précédente. »

L'un des 4 groupes a même identifié rapidement le fait que le nombre de morceaux correspondait directement au double du numéro de l'action + 1, et a ainsi décrit le processus inverse pour remonter au numéro de l'action à partir du nombre de morceaux.

Dans ces 4 groupes, le fait qu'un nombre de morceaux pair ne pouvait pas être atteint a été verbalisé.

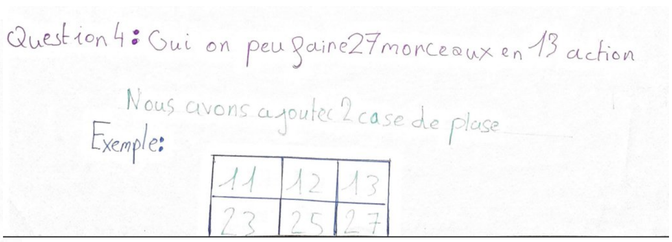
Phase de mise en commun et débat

Les 2 groupes ayant essentiellement manipulé pour répondre aux questions n°1 et 2 ont présenté ensemble leurs affiches :


Question

Question1 : A la fin de l'action7 il y a ~~16~~ morceaux (15)

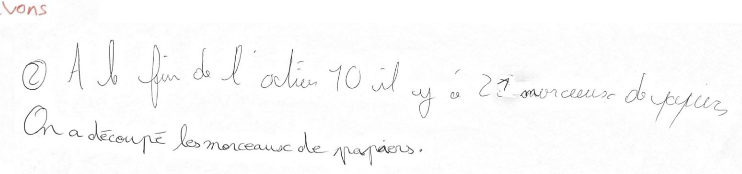
Nous avons déchirer 7bout de papiers et nous avons vu ~~16~~ morceaux ! (15)


Question 4 : Oui on peu faire 27 morceaux en 13 action

Nous avons ajouter 2 case de plase

Exemple:

11	12	13
23	25	27


② A la fin de l'action 10 il y a 21 morceaux de papiers

On a découpé les morceaux de papiers.

Les trois groupes suivants ont explicité leur approche « par récurrence » pour trouver à la fois le nombre de morceaux et le numéro de l'action à partir du nombre de morceaux.

Pour trouver les résultat on á fait : 0 → 1 +2 ; 0, 1, 1 → 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Pour trouver les resultat nous avons rajouter 2 a chaque resutat précedent (morceaux).

Oui, avec 13 action on a regarder dans notre tableau et il n'allait pas assez loin du coup on a du le prolonge pour trouver le bon resultat.

3) On peut avoir 27 morcaux en 13 action. ex : 11/23 + 2 => 12/25 + 2 => 13/27

Le fait de ne pas pouvoir obtenir 40 morceaux (question 4) était expliqué à l'oral par les présentateurs :

- soit par le fait le tableau indique le passage de 39 morceaux à l'action n°19 à 41 morceaux à l'action n°20.
- soit par le fait que le nombre de morceaux dans le tableau est systématiquement impair.

4) C'est pas possible d'avoir 40 morceaux car a la 20ème action on arrive a 41 morceaux.

4) Non ont peut pas obtenir 40 car les nombres sont impaires.

Non car c'est un nombre pair et que les resultat sont tous impair du coup ca ne marche pas !!

Question : 4
On ne peut pas atteindre 40 car c'est un nombre paires, et il n'y a que des nombres impaires pour les résultats (morceaux)
Les nombre qué l'on peut trouver sont 39 ou 41 car se sont des nombre impaires.

Un des présentateurs a tenu à justifier à l'oral de façon plus poussée le raisonnement de son groupe concernant la question 4 : « en partant de 1 morceau, forcément si on en ajoute 2 à chaque fois, on ne pourra trouver que des nombres impairs. » C'est précisément ce qui nous a permis de rebondir sur la notion de parité.

verbatims d'élèves sur le sujet de la parité

Je demande « savez-vous ce qu'est un nombre pair ? »
« un nombre pair c'est '1 + 1' = 2 » *« on peut faire des groupes de 2, c'est ça ? »* « oui »
« c'est un nombre, quand on le divise par 2 avec la calculatrice, ça fait un résultat où y a pas de virgule. »
Je demande « est-ce qu'à partir d'un nombre impair aussi on peut faire des groupes de 2 ? »
« oui madame, 3 + 3 ça fait 6 et 6 est un nombre pair. »

Je reformule « tout à fait, mais dans l'autre sens, par exemple, avec mes 27 morceaux de papier, est-ce que je peux fabriquer des groupes de 2 ? »

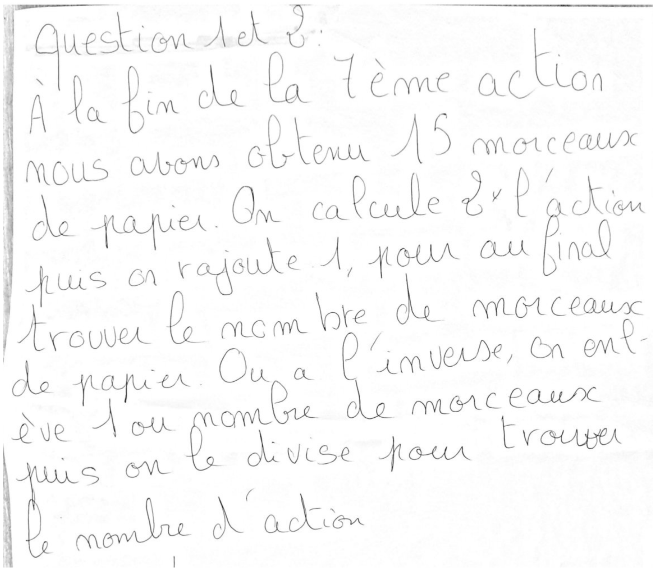
« ben, un nombre impair, c'est un nombre qui quand on le divise par 2 avec la calculatrice, ça fait un nombre à virgule. »

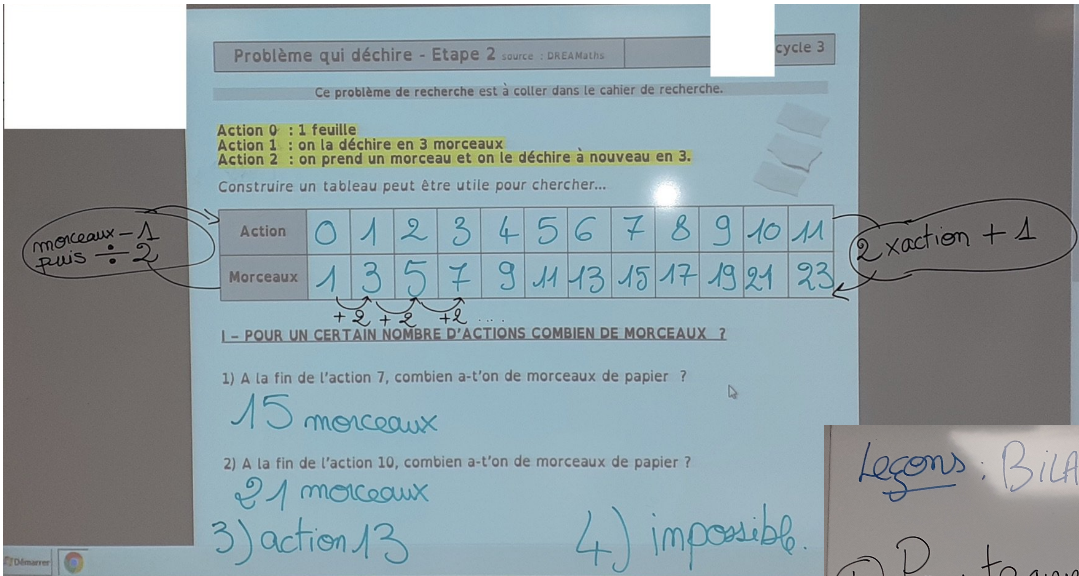
« non je peux pas fabriquer des groupes de 2 », puis, même élève, « euh... ben si, mais il reste quelquechose... »

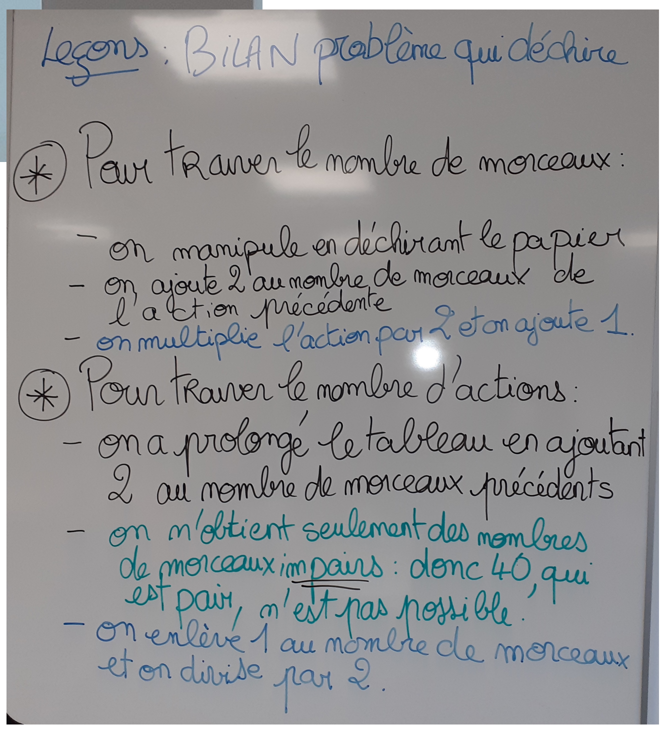
Je demande : « qu'est-ce que c'est ce 'quelquechose' qui reste ? »

« Ah ben y reste, y reste.... y reste toujours 1 ! »

Le dernier groupe a pu partager sa méthode rapide et efficace, et ainsi expliciter la manière de remonter au numéro de l'action en opérant directement sur le nombre de morceaux attendu.


Question 1 et 2 :
À la fin de la 7ème action
nous avons obtenu 15 morceaux
de papier. On calcule 2× l'action
puis on rajoute 1, pour au final
trouver le nombre de morceaux
de papier. Ou, à l'inverse, on enl-
ève 1 ou nombre de morceaux
puis on le divise pour trouver
le nombre d'action





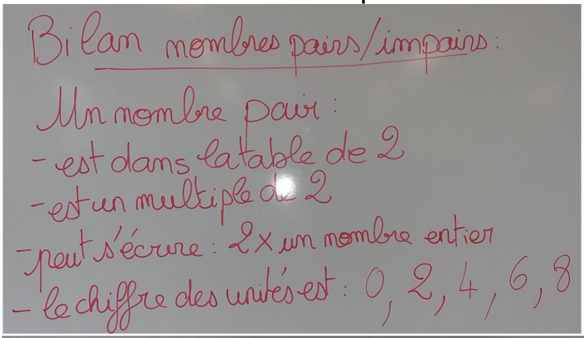
Le document remis aux élèves en début de séance et contenant l'énoncé du problème a été corrigé au tableau en s'inspirant des traces écrites de recherche des élèves.

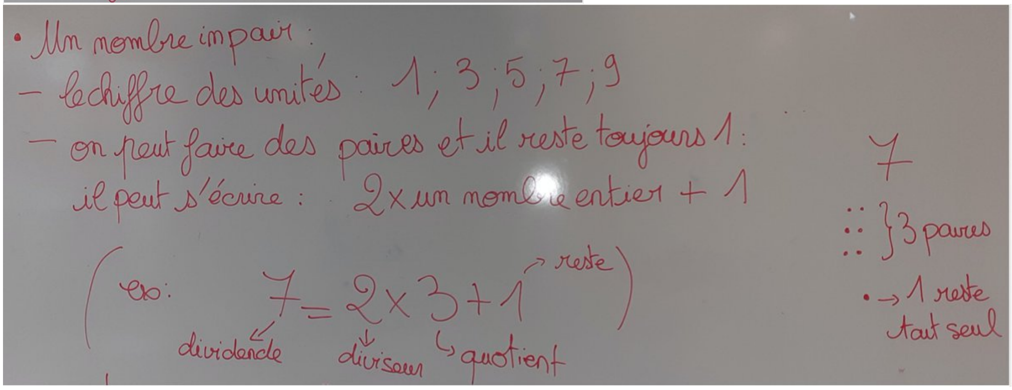
Un bilan a été institutionnalisé au fur et à mesure des présentations orales des élèves et était à apprendre par les élèves pour la séance suivante.

Prolongements

—> <u>1er prolongement</u> : notion de parité réinvestie dès la séance suivante :

1) Institutionnalisation verbalisée par les élèves eux-mêmes

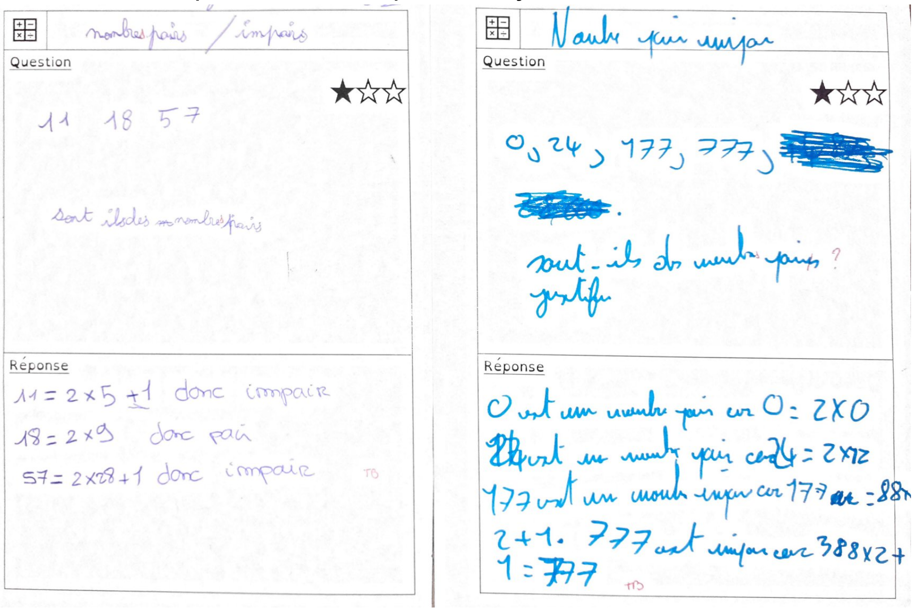




—> Application : 14 et 7 sont-ils des nombres pairs ? Justifier

Réponses attendues : Oui 14 est un nombre pair car il s'écrit 2 x 7 ;
Non 7 n'est pas un nombre pair, il est impair car il s'écrit 2 x 3 + 1.

2) Création d'énoncés similaires par les élèves pour les 'jouer' en mises en train dans les séances suivantes



3) Devoirs à la maison : 0 ; 17 ; 296 ; 555 ; 1 381 ; 24 888 ; 1 000 000 sont-ils des nombres pairs ? Justifier.

—> <u>2eme prolongement</u> : réinvestir au moment de la séquence à venir sur la division, les mots « division » et « reste » mentionnés pendant le débat, ainsi que l'ensemble des éléments de la division euclidienne spontanément reconnus par quelques élèves au moment de l'écriture de 7 comme nombre impair.

En particulier, quand les élèves seront amenés à représenter une division euclidienne sous la forme : dividende = diviseur x quotient + reste, réinvestir le fait que le problème qui déchire nous avait conduit à représenter un nombre impair de morceaux par : 2 x nombre entier (ou numéro d'action) + 1, et que pour remonter au numéro de l'action à partir du nombre de morceaux, le dernier groupe avait indiqué 'enlever 1' au nombre de morceaux, puis diviser le résultat obtenu par 2, en verbalisant eux-mêmes le fait qu'il s'agissait de l'« opération inverse ».